Prova do Teorema de Cantor:

Uma Introdução à Prática Matemática

Renata de Freitas
e
Petrucio Viana

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense
Niterói, RJ
2024

Sumário

1 Conjuntos **7**
1.1 Conjuntos, elementos, pertinência 8
1.2 Conjuntos numéricos 12
1.3 Definição de conjuntos 13
1.4 Igualdade 16
1.5 Inclusão 17
1.6 Exercício resolvido 19
1.7 Exercícios de fixação e revisão 23

2 Provas **25**
2.1 O problema de provar uma inclusão 25
2.2 Refutações de inclusões 27
2.3 Provas de igualdades 28
2.4 Provas de generalizações de implicações 29
2.5 Provas de generalizações de bi-implicações 31
2.6 Exercício resolvido 32
2.7 Exercícios de fixação e revisão 33

3 Método de Prova por Indução **35**
3.1 Igualdade de Gauss 35
3.2 A estrutura dos naturais 36
3.3 O método de indução matemática 36
3.4 Indução forte 39
3.5 Exercício resolvido 39
3.6 Exercícios de fixação e revisão 42

4 Operações com conjuntos **44**
4.1 Conjunto universo 44
4.2 Conjunto vazio 44
4.3 Relações e operações 45
4.4 Interseção 45
4.5 União 46
4.6 Complementação 47
4.7* Provas algébricas 48
4.7.1 Álgebra de conjuntos 48
4.7.2 Provas algébricas 48
4.7.3 Igualdades e inclusões básicas 49

4.7.4 Propriedades básicas da igualdade 50
4.7.5 Propriedades básicas da inclusão 51
4.7.6 Redação de provas algébricas 51
4.7.7 Exemplos 52
4.8 Exercício resolvido 53
4.9 Exercícios de fixação e revisão 53

5 Prova por Casos e Redução ao Absurdo 56
5.1 Prova por casos 56
5.2 Redução ao absurdo 57
5.3 Exercício resolvido 60
5.4 Exercícios de fixação e revisão 60

6 Conjunto das Partes e Antinomia de Russell 62
6.1 Conjunto das partes 62
6.2 Antinomia de Russell 63
6.3 Exercício resolvido 65
6.4 Exercícios de fixação e revisão 66

7 Relações 67
7.1 Par ordenado 67
7.2 Produto cartesiano 68
7.3 Relações 69
7.4 Domínio e imagem 71
7.5 Operações sobre relações 72
7.6 Relações especiais 74
7.7 Endorrelações 75
7.8 Grafo de uma relação 75
7.9 Exercício resolvido 80
7.10 Exercícios de fixação e revisão 84

8 Relações de Equivalência 86
8.1 Igualdade 86
8.2 Reflexividade 86
8.3 Simetria 88
8.4 Transitividade 89
8.5 Relação de equivalência 92
8.6 Exercício resolvido 97
8.7 Exercícios de fixação e revisão 98

9 Estrutura Quociente 101
9.1 Estrutura quociente 104

10 Relações de Ordem 106
10.1 Motivação 106
10.2 Relações de ordem 107
10.3 Diagrama de Hasse 108
10.4 Ordens numéricas 111

10.5 Exercícios de fixação e revisão . . . 114

11 Funções 116
11.1 Funcionalidade, totalidade, injetividade, sobrejetividade . . . 116
11.2 Funções . . . 119
11.3 Relações bijetivas . . . 119
11.4 Exercícios de fixação e revisão . . . 121

12 Hotel de Hilbert 126
12.1 Hotel de Hilbert . . . 126
12.2 Problemas 1, 2, 3, e n . . . 127
12.3 Problemas ω, 2ω, 3ω, e $m\omega$ . . . 132
12.4 Problemas ω^2, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$ . . . 138
12.5 Problema $\mathbb{R}$ . . . 143
12.6 Exercícios de fixação e revisão . . . 145

13 Teorema de Cantor 147

A Definições 151
A.1 Definições . . . 151
A.2 Forma normal das definições . . . 154
A.2.1 Tipos de objetos . . . 154
A.2.2 Conceitos definidos e básicos . . . 155
A.2.3 Forma normal . . . 156

Introdução

O Professor Dinamérico Pombo diz que um bom curso (ou palestra) de Matemática deve ser concluído com a prova de um teorema. Concordo com ele. Afinal, não faz sentido um curso de Matemática onde vários conteúdos são apresentados sem conexão com a prova de um teorema, pois Matemática *é* a prova de teoremas.

Neste livro, nosso objetivo é provar o Teorema de Cantor. Vamos experimentar a prática matemática de demonstração de teoremas estudando conceitos básicos de Teoria de Conjuntos (conjuntos, relações, funções) até chegar na prova de que existem infinitos diferentes e cada vez maiores (Teorema de Cantor). No caminho, vamos fazer alguns pequenos desvios para estudar um pouco mais alguns conjuntos numéricos que já conhecemos do Ensino Médio: dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, dos números reais, dos números complexos. E vamos também conhecer novos conjuntos numéricos: dos inteiros módulo n.

Penso nesse texto como parte de um curso de "alfabetização matemática", pois o que apresentamos deve ajudar a entender como ler e escrever Matemática.

Quando dizemos "leia o texto", no contexto da Matemática, não esperamos que a pessoa a quem nos dirigimos vá se sentar confortavelmente como faria para ler um romance ou um livro de poesias. Ler Matemática está muito próximo de estudar Matemática. Ao ler um texto de Matemática, ao mesmo tempo escrevemos bastante, pois devemos ir anotando:

- as perguntas que surgem durante a leitura (por exemplo: *e se o conjunto fosse finito/infinito? isso faria sentido se os elementos do conjunto não fossem números?*);

- os exemplos que nós desenvolvemos ao tentar entender os exemplos apresentados no texto (se o texto apresenta um exemplo com números, eu tento fazer um exemplo parecido com letras; ou se o texto apresenta um exemplo que tem um conjunto com 5 elementos, por exemplo, eu tento fazer um exemplo parecido usando um conjunto com 2 elementos, depois usando um conjunto com 7 elementos);

- o desenvolvimento dos detalhes de um argumento que foi apresentado de forma resumida na demonstração de um resultado (por exemplo, se não entendemos imediatamente por que $(n+1)n! = (n+1)!$, desenvolver o fatorial escrevendo $(n+1)! = (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = (n+1)\ \cdot\ (\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\ ) = (n+1)\cdot n!$ pode ajudar);

- nossa lista de dúvidas e comentários que surgiram durante a leitura (por exemplo, *ali em cima está escrito que números complexos é conteúdo do Ensino Médio, eu não estudei complexos no Ensino Médio, será que preciso conhecer esse conteúdo para ler esse livro?* ou *o que será que quer dizer "diferentes infinitos"?* ou ainda, *será que o Teorema de Cantor está relacionado com aquela história do Hotel de Hilbert?*).

É bom, também, quando estudamos Matemática, ir fazendo uma lista com as definições e os fatos matemáticos mais importantes, relacionados ao assunto que é nosso foco no momento. Ter esta lista em mãos na hora de resolver os exercícios ajuda muito.

Outra coisa importante é saber que, em Matemática, não devemos ter a expectativa de entender tudo completamente, da primeira vez em que abordamos um conteúdo. Devemos poder avançar sem o entendimento completo, que na maior parte das vezes nunca alcançamos mesmo. O que esperamos é que, na próxima vez em que estudarmos aquele assunto, nosso entendimento vai ser melhor; na vez seguinte, ainda melhor. Tudo o que vamos estudando no caminho, mesmo conteúdos não diretamente relacionados, vai nos trazendo maturidade e contribuindo para um melhor entendimento de cada assunto específico.

Renata

Capítulo 1

Conjuntos

Neste capítulo, apresentamos as noções básicas de *conjunto* e *pertinência*. Falamos rapidamente dos principais conjuntos numéricos. Discutimos, de forma um pouco mais detalhada, duas maneiras básicas de apresentar (ou definir) conjuntos. Por fim, iniciamos o estudo das duas mais básicas relações entre conjuntos: a igualdade e a inclusão.

*

Em todas as áreas da Matemática, e até mesmo nas outras ciências, é usual empregarmos a palavra

conjunto

para nos referirmos a uma *totalidade de objetos* que, por uma razão ou outra, queremos considerar como distinguidos dos demais.

Por exemplo, em um estudo socioeconômico, podemos classificar a totalidade dos indivíduos envolvidos em 3 classes, de acordo com os seus poderes aquisitivos: o conjunto dos indivíduos mais abastados, que formam a classe A; o conjunto dos indivíduos com um bom poder aquisitivo, que formam a classe B; e o conjunto dos indivíduos com baixo poder aquisitivo, que formam a classe C.

Ou, ainda, em Aritmética, é usual considerarmos a totalidade dos números naturais dividida em outras totalidades: o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, o conjunto dos números primos, etc.

A noção de *conjunto* — totalidade de objetos considerados como distinguidos dos demais — é, aparentemente, tão primitiva quanto as noções de *número* e *figura*. Por esta razão, o seu uso parece ser imprescindível para o desenvolvimento da Matemática e de várias outras ciências.

> *Após o surgimento e o desenvolvimento da noção de conjunto, os conceitos, notações e resultados básicos sobre conjuntos se tornaram um pré-requisito para o estudo de qualquer disciplina matemática. Portanto, o domínio deste conteúdo é essencial tanto para a leitura dos textos, quanto para a resolução (e a redação das resoluções) de questões e problemas. Por esta razão, todo estudante de Matemática deve conhecer os rudimentos da* Teoria dos Conjuntos.

1.1 Conjuntos, elementos, pertinência

A noção de conjunto empregada em Matemática é muito parecida — mas não é idêntica — com aquela que empregamos no dia a dia.

> Um conjunto é um
>
> *agregado*, *agrupamento*, *classe*, *grupo*, etc
>
> de objetos.

Exemplo 1.1 *Alguns exemplos de conjunto são:*

(a) O conjunto formado pela letra a *(e nada mais).*

(b) O conjunto formado por todos os seres vivos.

(c) O conjunto formado por todos os números naturais.

(d) O conjunto formado pelo estádio do Maracanã e pela alegria de uma torcida quando seu time faz um gol.

(e) O conjunto formado pelo conjunto dos números pares e pelo conjunto dos números ímpares.

Observe no Exemplo 1.1 que um conjunto pode ser formado por:

(a) um número específico de objetos;

(b) um número não específico mas finito de objetos;

(c) um número infinito de objetos;

(d) objetos concretos e objetos abstratos;

(e) outros conjuntos.

Uma diferença essencial entre a maneira como a palavra “conjunto” é empregada em Matemática e como ela é usada no dia a dia é a seguinte:

> Em Matemática, quando nos referimos a conjuntos (agregados, agrupamentos, classes, grupos, etc) de objetos, estamos assumindo os seguintes aspectos:
>
> – todos os conjuntos em questão são formados com objetos obtidos de um outro conjunto, que chamamos de *conjunto universo*;
>
> – o conjunto universo a partir do qual os conjuntos são formados nem sempre é explicitamente caracterizado, mas está fixo, no contexto;
>
> – a **ordem** dos elementos nos conjuntos **não é relevante**;
>
> – a **repetição** dos elementos nos conjuntos **não é relevante**.

Assim, conjuntos são usados quando temos um grupo de *objetos distinguidos* — dentro de um grupo maior de objetos — para os quais *nem ordem nem repetição são levadas em consideração.*

Exemplo 1.2 *(a) Consideremos a questão:*

> *Quantas comissões de* 3 *elementos podemos formar, dado um grupo com* 10 *pessoas?*

Aqui, as palavras "comissão" e "grupo" são sinônimas de "conjunto".

De fato, de acordo com essa questão, não são consideradas nem a ordem nem a repetição de pessoas nas comissões e no grupo.

(b) Em contraste com a questão acima, consideremos a questão:

> *Quantas comissões consistindo de um presidente, um vice-presidente e um secretário, podemos formar, dado um grupo com* 10 *pessoas?*

Aqui a palavra "grupo" é sinônima de "conjunto", mas a palavra. "comissão" não é sinônima de "conjunto".

De fato, de acordo com essa questão, há uma hierarquia das pessoas que fazem parte da comissão.

Dado um conjunto universo e um conjunto qualquer, alguns objetos do universo estão no conjunto e outros não.

> Os objetos que fazem parte do conjunto são os seus <u>elementos</u>.
>
> Os elementos do conjunto são ditos <u>pertencer</u> ao conjunto.
>
> Assim, *pertinência* é uma relação entre dois objetos, que se estabelece quando o segundo é um conjunto e o primeiro é um elemento do segundo.
>
> A relação de pertinência, denotada
>
> $$\in$$
>
> é a principal relação estudada na Teoria dos conjuntos.

Sempre que for conveniente, vamos denotar conjuntos genéricos por letras latinas maiúsculas, como

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z$$

e elementos genéricos destes conjuntos por letras latinas minúsculas, como

$$a, b, c, \ldots, x, y, z.$$

Assim, dados um objeto genérico a e um conjunto genérico A:

escrevemos	no lugar de
$a \in A$	a é um elemento de A a pertence a A
$a \notin A$	a não é um elemento de A a não pertence a A

Um aspecto bastante sutil do conceito "elemento" é que ser um elemento não é uma *propriedade*, mas sim uma *relação*. Isto é, dado apenas um objeto, não faz sentido perguntarmos se ele é um elemento ou não. O que faz sentido é, dado dois objetos (não necessariamente distintos) perguntarmos se um deles é elemento do outro ou não.

Exemplo 1.3 *(a) Considere o conjunto P dos planetas do Sistema Solar e o conjunto A dos objetos estudados pela Astronomia. Temos que:*

$\mathsf{Terra} \in P$
$\mathsf{Sol} \notin P$
$P \notin \mathsf{Terra}$
$\mathsf{Sol} \in A$
$P \in A$

(b) Considere o conjunto C dos continentes da Terra e o conjunto G dos objetos estudados pela Geografia. Temos que:

$\mathsf{América} \in C$
$\mathsf{Atlântico} \notin C$
$\mathsf{Atlântico} \in G$
$G \notin \mathsf{Atlântico}$
$C \notin C$
$C \in G$

(c) Considere o conjunto S das seleções que participaram da Copa do Mundo de Futebol de 2023 (observe que, como estamos tratando de um conjunto, não estamos considerando nenhuma hierarquia entre as seleções). Neste caso, consideramos que cada seleção é um conjunto de jogadoras (analogamente, como estamos tratando de conjuntos, não estamos considerando nenhuma hierarquia entre as jogadoras de cada seleção). Temos que:

$\mathsf{Seleção\ Brasileira} \in S$

Observe que, neste caso, o conjunto Seleção Brasileira *pertence a outro conjunto, S. Também, temos que:*

$\mathsf{Seleção\ Italiana} \notin S$

Além disso, neste caso, temos que:

$\mathsf{Marta} \in \mathsf{Seleção\ Brasileira}$
$\mathsf{Formiga} \notin \mathsf{Seleção\ Brasileira}$

Observação. Um aspecto importante dos conjuntos usados em Matemática é o seguinte:

> Os elementos de um conjunto podem, eles mesmos, serem conjuntos! Assim, dependendo da situação, é legítimo escrever
>
> $$a \in A$$
>
> mesmo quando a é um conjunto!

Já vimos exemplos desta situação no Exemplo 1.3(c). Vejamos outro exemplo: considere a Universidade Federal Fluminense, UFF, como um conjunto. Neste caso, ela é formada por Institutos, que são os seus elementos neste contexto. Assim, temos que o Instituto de Matemática e Estatística, IME, é um elemento da UFF, ou seja,

$$\mathsf{IME} \in \mathsf{UFF}$$

mas o Instituto Félix Pacheco, IFP, não é um dos institutos da UFF, ou seja,

$$\mathsf{IFP} \notin \mathsf{UFF}$$

Neste caso, cada instituto da UFF é visto como um elemento.

Por outro lado, cada instituto da UFF é formado por departamentos, que são os seus elementos. Assim, temos o Departamento de Análise, GAN, que é um dos departamentos do Instituto de Matemática e Estatística da UFF, ou seja,

$$\mathsf{GAN} \in \mathsf{IME}$$

mas o Departamento de Estradas de Rodagem, DER, não é um dos departamentos do Instituto de Matemática e Estatística da UFF, ou seja,

$$\mathsf{DER} \notin \mathsf{IME}$$

Neste caso, cada instituto da UFF, que antes era visto como um elemento de um conjunto, agora é visto como um conjunto de departamentos.

Assim, neste contexto, a UFF é um conjunto de institutos e cada instituto da UFF é um conjunto de departamentos.

Aparentemente, esta elaboração de que os elementos de um conjunto podem por sua vez ser vistos como conjuntos sempre pode ser levada adiante.

Por exemplo, voltando à UFF e seus departamentos, temos que cada departamento da UFF é, por sua vez, um conjunto de professores. Assim, temos o Professor Petrucio Viana, Petrucio, que é um dos professores do Departamento de Análise do Instituto de Matemática e Estatística da UFF, ou seja,

$$\mathsf{Petrucio} \in \mathsf{GAN}.$$

Mas a Professora Márcia Cerioli, Márcia, não é professora do Departamento de Análise do Instituto de Matemática e Estatística da UFF, ou seja,

$$\mathsf{Márcia} \notin \mathsf{GAN}.$$

Na verdade, Márcia Cerioli não é professora da UFF mas, sim, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ.

Assim, neste contexto, o Instituto de Matemática da UFF é um conjunto de departamentos, e cada departamento é um conjunto de professores.

Em resumo, de acordo com esta análise, a UFF é um conjunto cujos elementos são institutos; o IME (que é um dos elementos da UFF) é um conjunto cujos elementos são departamentos; o GAN (que é um dos elementos do IME) é um conjunto cujos elementos são professores; e o Petrucio (que é um dos elementos do GAN) é um professor.

1.2 Conjuntos numéricos

Admitimos como conhecidos os conjuntos numéricos usuais:

$\mathbb{N}$ — o conjunto dos números naturais, inclusive o zero,

$\mathbb{N}^*$ — o conjunto dos números naturais, exclusive o zero,

$\mathbb{Z}$ — o conjunto dos números inteiros, negativos, zero e positivos,

$\mathbb{Q}$ — o conjunto dos números racionais, frações negativas, zero e frações positivas,

$\mathbb{R}$ — o conjunto dos números reais, dízimas periódicas e não periódicas, negativas ou positivas, e zero,

$\mathbb{C}$ — o conjunto dos números complexos.

O conjunto dos números naturais, que denotamos por $\mathbb{N}$, é constituído pelos números usados pra contar: $1, 2, 3, 4$, e assim por diante. Ou seria: $0, 1, 2, 3, 4$, e assim por diante? Esse é o nosso primeiro exemplo e aqui já temos uma dúvida: o número zero é ou não é um elemento do conjunto $\mathbb{N}$?

Com os números naturais podemos fazer contas de somar e o resultado de qualquer conta será sempre um elemento do conjunto dos naturais. Por isso dizemos que o conjunto dos números naturais é *fechado* para a operação de adição. Mas não é assim se formos fazer contas de subtrair também.

Se queremos subtrair, é melhor passar para o conjunto dos números inteiros, que denotamos por $\mathbb{Z}$. Os elementos do conjunto dos números inteiros são: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$, e assim por diante. O conjunto dos números inteiros é fechado para as operações de adição e subtração: com números inteiros podemos fazer contas de somar e de subtrair e o resultado de qualquer conta será sempre um número inteiro.

Se considerarmos agora a multiplicação, temos que ambos o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros são fechados para esta operação. Mas não é assim se formos fazer contas de dividir também. O conjunto dos números inteiros é fechado para a adição e a subtração, é fechado para a multiplicação, mas não é fechado para a divisão.

Se queremos dividir, é melhor passar para o conjunto dos números racionais, que denotamos por $\mathbb{Q}$. Os elementos do conjunto dos números racionais são todas as frações que a gente pode formar usando números inteiros no numerador e inteiros não nulos no denominador. Usando números racionais podemos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar e dividir (desde que não seja por zero) e o resultado de qualquer conta é sempre um número racional. Ou seja, o conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (excluindo o zero da posição de divisor).

Em seguida temos o conjunto dos números reais, que são os números que a gente usa para medir. Por exemplo, se temos um quadrado cujo lado mede 1 centímetro, não temos nenhum número racional para representar a medida da diagonal desse quadrado. A diagonal de um quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$, que não é um número racional. (Vamos ver a prova desse fato em um texto mais adiante.) Usando números reais podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir (desde que não seja por zero), e o resultado de qualquer conta será sempre um número real. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é fechado para essas quatro operações. Mas não é assim se quisermos tirar a raiz quadrada. Nem sempre a raiz quadrada de um número real é um número real. A raiz quadrada de números negativos não é um número real.

Chegamos, então, ao conjunto dos números complexos, que denotamos por $\mathbb{C}$. No conjunto dos números complexos podemos fazer qualquer conta (com exceção de dividir por zero) e o resultado está garantido: podemos até tirar a raiz quadrada de números negativos.

Admitimos como conhecidos os conjuntos numéricos usuais: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$. Faremos referência aos elementos desses conjuntos, suas propriedades e relações, sempre que for necessário, confiando no entendimento que você já obteve desses objetos, em estudos anteriores.

1.3 Definição de conjuntos

Um conjunto é denotado pela apresentação de sua definição entre chaves: $\{\ ,\ \}$. Vamos estudar duas maneiras de definir um conjunto:

– por *lista* ou *indicação de uma lista*,

– por *propriedade*.

Para definir um conjunto por *lista*, apresentamos uma lista dos *nomes* dos elementos do conjunto. Um conjunto definido por lista é denotado pela apresentação dos nomes dos seus elementos separados por vírgulas e encerrados entre chaves.

Exemplo 1.4 *1. O conjunto dos resultados possíveis do arremesso de uma moeda (que não cai em pé) pode ser especificado como*

$$\{K, C\},$$

onde K denota cara e C denota coroa.

2. O conjunto dos resultados possíveis em um único arremesso de um dado pode ser especificado como

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Na especificação de conjuntos por listagem, é usual admitirmos a possibilidade de listarmos um único elemento ou, até mesmo, não listarmos nenhum elemento. Nestes casos extremos, especificamos dois conjuntos especiais:

Definição 1.1 *Seja A um conjunto. Dizemos que A é <u>unitário</u> quando A possui um único elemento.*

Como usual, denotamos um conjunto unitário por

$$\{a\}$$

onde a representa o único elemento do conjunto.

Definição 1.2 *Seja A um conjunto. Dizemos que A é* <u>*vazio*</u> *quando A não possui elementos.*

Como usual, denotamos o conjunto vazio pelo símbolo

$$\emptyset$$

que é a letra "o" do alfabeto norueguês estilizada.

Cuidado para não confundir $\emptyset$ (conjunto vazio) com 0 (número zero). Estes objetos matemáticos, embora relacionados, não são iguais.

À primeira vista, $\emptyset$ parece ser um conceito estranho, já que o que caracteriza um conjunto são os seus elementos e $\emptyset$ não possui elementos. Mas, como veremos adiante, a noção de conjunto vazio é extremamente útil no desenvolvimento teórico e nas aplicações da Teoria dos Conjuntos.

Observação. Um problema com o qual nos deparamos frequentemente é o seguinte:

> Dado um conjunto A especificado por listagem e um objeto x, qualquer, determinar se $x \in A$ ou não.

Para resolver este problema, basta fazer o seguinte:

1. apagar as chaves que delimitam A e as vírgulas que separam os elementos de A;
2. verificar se x ocorre entre os "elementos que sobraram".

Por exemplo, dado o conjunto

$$A = \{\ 0, \{1\}, \{\{2\}\}, \{\{\{3\}\}\}\ \}$$

e os objetos $\{2\}$ e $\{\{2\}\}$ (que por sua vez também são conjuntos) temos que

$$\{2\} \notin A$$

mas

$$\{\{2\}\} \in A.$$

De fato, apagando as chaves que "delimitam" A e as vírgulas que "separam" os elementos de A, "sobram" os objetos:

$$0 \quad \{1\} \quad \{\{2\}\} \quad \{\{\{3\}\}\}$$

Observe que $\{\{2\}\}$ ocorre na lista acima, mas $\{2\}$ não ocorre.

A definição por lista é adequada apenas para conjuntos finitos *pequenos* (com poucos elementos). No caso de conjuntos finitos *grandes* ou de conjuntos infinitos, podemos apresentar uma *indicação da lista* dos elementos do conjunto.

Um conjunto definido por indicação de lista é denotado pela apresentação dos nomes de *alguns* dos seus elementos separados por vírgulas e encerrados entre chaves e são usadas reticências para substituir os nomes de elementos do conjunto que não são listados. Devem ser listados nomes de elementos em quantidade suficiente para que a pessoa que vai ler possa inferir quais nomes foram substituídos pelas reticências. Eis uma apresentação do conjunto das professoras do Departamento de Análise, por indicação de lista:

$$A = \{\mathsf{Ana}\ ,\ \mathsf{Anne}\ ,\ \mathsf{Carla}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathsf{Viviana}\ ,\ \mathsf{Yuri}\}.$$

No caso de conjuntos infinitos, podem ser usados *nomes genéricos* que indiquem a forma dos elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números naturais pode ser apresentado assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2,\ \ldots\ ,\ n\ ,\ \ldots\}$$

e o conjunto dos números pares, assim:

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4,\ \ldots\ ,\ 2n\ ,\ \ldots\}.$$

Há ainda outras formas mais complicadas, dependendo do que pensou a pessoa que escreveu a definição do conjunto.

Para definir um conjunto por *propriedade*, devemos apresentar um conjunto universo e uma propriedade que se aplica a elementos desse universo. Os elementos do conjunto definido são os elementos do conjunto universo que possuem a propriedade.

Um conjunto definido por propriedade é denotado do seguinte modo:

$$\{x \in \mathcal{U} : x \text{ é } P\},$$

onde $\mathcal{U}$ é o nome do conjunto *universo* e P é uma especificação da *propriedade*.

Apesar de ser estranho, a expressão

$$\{x \in \mathcal{U} : x \text{ é } P\}$$

costuma ser lida como

o conjunto dos x pertencentes a $\mathcal{U}$ tais que x é P.

Outra maneira de denotar um conjunto definido por propriedade é

$$\{x\ :\ x \in \mathcal{U} \text{ e } x \text{ é } P\},$$

ou ainda de formas mais complicadas, dependendo do que pensou a pessoa que escreveu a definição do conjunto.

Por exemplo, o conjunto

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N}\ :\ x \text{ é par}\}$$

também pode ser denotado por

$$\mathbb{P} = \{x\ :\ \text{ existe } y \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2y\}$$

ou, ainda, por

$$\mathbb{P} = \{2y\ :\ y \in \mathbb{N}\}.$$

1.4 Igualdade

Além da pertinência, outra relação fundamental entre os objetos da Teoria dos Conjuntos é a relação de igualdade. Quando estamos tratando de conjuntos, ela é regulada pelo seguinte princípio:

Princípio da Extensão:

Dois conjuntos são <u>iguais</u> se, e somente se, possuem exatamente os mesmos elementos.

Por exemplo, considere os conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é natural}\}, \\ B & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é soma de 4 quadrados}\}. \end{array}$$

Temos que A e B são iguais.

Para saber se dois conjuntos A e B são iguais, precisamos saber apenas *quais* são os elementos de A e de B. Assim:

Não importa a ordem em que os elementos são apresentados. Por exemplo:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Não importa se há repetição na apresentação dos elementos. Por exemplo:

$$\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

Não importa a maneira como os elementos são apresentados. Por exemplo:

$$\{1, 2, 2, 2, 3\} = \{3, 3, |\sqrt{4}|, 1\}$$

Não importa o universo em que os objetos são tomados, *nem a propriedade* escolhida para a apresentação do conjunto. Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

Propriedades básicas da igualdade

A igualdade é uma relação importante entre conjuntos que possui várias propriedades fundamentais. Dentre elas, as mais destacadas são:

Propriedades da Igualdade:

Para todos os conjuntos A, B e C, valem as seguintes propriedades:

(1) $A = A$.

(2) Se $A = B$, então $B = A$.

(3) Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Todos os enunciados (1), (2) e (3) são intuitivamente verdadeiros.

(1) afirma que todo conjunto é igual a si mesmo.

(2) afirma que se um conjunto A é igual a um conjunto B, então B também é igual a A. Assim, podemos dizer, simplesmente, que *A e B são iguais*

(3) afirma que se um conjunto A é igual a um conjunto B e este conjunto B também é igual a um conjunto C, então A e C são iguais.

As propriedades que relacionam a pertinência com a igualdade são as seguintes:

Propriedades da Pertinência e da Igualdade:

Para todo objeto a e todos os conjuntos A, B e C, valem as seguintes propriedades:

(4) Se $A = B$ e $a \in A$, então $a \in B$.

(5) Se $A = B$ e $A \in C$, então $B \in C$.

Ambos os enunciados (4) e (5) são intuitivamente verdadeiros.

(4) afirma que conjuntos iguais possuem os mesmos elementos.

(5) afirma que conjuntos iguais pertencem aos mesmos conjuntos.

Verificando igualdades

Dados dois conjuntos A e B, como verificar se A e B são iguais? Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é soma de 3 quadrados}\} = \mathbb{N}?$$

Dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Assim, se queremos verificar se A e B são iguais, podemos fazer isso verificando se:

– todo elemento de A é também elemento de B,

– todo elemento de B é também elemento de A.

Essa ideia nos leva à noção de inclusão de conjuntos.

1.5 Inclusão

Definição 1.3 *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que <u>A está</u> <u>contido em B</u>, denotado por $A \subseteq B$, quando todos os objetos que são elementos do conjunto A são também elementos do conjunto B.*

Ou seja:

$$\boxed{A \subseteq B \text{ se, e só se, para todo } x\text{, se } x \in A\text{, então } x \in B.}$$

Por exemplo, o conjunto das pessoas com deficiência está contido no conjunto dos seres humanos. Quando um conjunto A está contido em um conjunto B, dizemos também que <u>A é subconjunto de B</u>.

Notação

notação	*leitura*
$a \subseteq b$	a está contido em b
$a \subseteq b$	a é subconjunto de b
$a \not\subseteq b$	a não está contido em b
$a \not\subseteq b$	a não é subconjunto de b

Observe a semelhança entre o símbolo $\leq$, utilizado quando comparamos números, e o símbolo $\subseteq$, utilizado quando comparamos conjuntos.

Propriedades básicas da inclusão

Estamos interessados nas propriedades da inclusão que valem para todos os conjuntos, independente da natureza dos seus elementos.

Para *todos os conjuntos* A, B e C, temos que:

(1) $A \subseteq A$ *(Reflexividade)*

(2) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$ *(Antissimetria)*

(3) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ *(Transitividade)*

Observe que as propriedades listadas da relação $\subseteq$, sobre conjuntos, são inteiramente análogas a propriedades da relação $\leq$, sobre números. Mas, nesse contexto, a semelhança para por aí. Por exemplo, para números, vale:

para todos os números x e y, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Mas existem conjuntos A e B tais que nem $A \subseteq B$ nem $B \subseteq A$. Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, temos que $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$.

Como verificar inclusões?

Terminamos esse capítulo com uma questão para você pensar: dados um conjunto A e um conjunto B, como verificar se $A \subseteq B$? Considere os conjuntos A e B a seguir.

1. Em cada item, verifique se $A \subseteq B$.

   (a) $A = \{a, e\}$ e
   $B = \{a, b, c, d, e\}$

   (b) $A = \{a, e, i, o, u\}$ e
   $B = \{a, b, c, d, e\}$

   (c) $A = \{a, e, i, o, u\}$ e
   $B = \{x : x$ é letra do alfabeto latino$\}$

   (d) $A = \{1, 2, 3\}$ e
   $B = \{x : x$ é letra do alfabeto latino$\}$

   (e) $A = \{x \in \mathbb{N} : x$ é par e primo$\}$ e
   $B = \{1, 2, 3\}$

   (f) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é soma de quadrados}\}$ e
   $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é positivo}\}$

2. Agora, volte aos itens da questão anterior e pense na questão que nos interessa mais: em cada item, tente explicar <u>como</u> você verificou se $A \subseteq B$.

No próximo capítulo, vamos retomar essa questão de *como* verificar, dados os conjuntos A e B, se A está contido em B, ou não.

1.6 Exercício resolvido

1. Defina os seguintes conjuntos por listagem:
   (a) Conjunto das letras da palavra óuauêaíó.
   (b) Conjunto das disciplinas do primeiro período do curso de Bacharelado em Matemática da UFF.
   (c) Conjunto das três montanhas mais altas da Terra.
   (d) Conjunto dos números pares e primos.
   (e) Conjunto dos números reais que são solução da equação $x^2 = -1$.

2. Seja $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9\}, 10\}$. Classifique cada afirmação a seguir como *verdadeira* ou *falsa*. Justifique.
   (a) A tem 10 elementos.
   (b) A é finito.
   (c) 1 é um elemento de A.
   (d) 1 é um elemento de um elemento de A.
   (e) $\{1\}$ é um elemento de A.

3. Classifique cada afirmação a seguir como *verdadeira* ou *falsa*. Justifique.
   (a) Todos os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ e $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ são elementos do conjunto $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$.
   (b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tem exatamente 2 elementos.
   (c) $\{\emptyset, 1, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, 7, 8, 9, \{10\}\}$ e $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ são iguais.

Nos exercícios a seguir, preencha as lacunas com $\in$, $\subseteq$, ambos ou nenhum deles, para formar enunciados verdadeiros.

4. Considere $A = \{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$.
   (a) $\mathsf{e} \ldots\ldots A$
   (b) $\mathsf{i} \ldots\ldots A$
   (c) $\mathsf{o} \ldots\ldots A$
   (d) $\{\mathsf{o}\} \ldots\ldots A$
   (e) $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \ldots\ldots A$
   (f) $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \ldots\ldots A$

5. Considere $A = \{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ e $B = \{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}, \mathsf{o}, \{\mathsf{e}\}\}$.
   (a) $\mathsf{i} \ldots\ldots B$
   (b) $\mathsf{o} \ldots\ldots B$
   (c) $\{\mathsf{o}\} \ldots\ldots B$
   (d) $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \ldots\ldots B$
   (e) $A \ldots\ldots B$
   (f) $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \ldots\ldots B$
   (g) $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\} \ldots\ldots B$
   (h) $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\} \ldots\ldots B$
   (i) $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\} \ldots\ldots B$

Tente resolver o exercício, antes de ler a resolução.

- RESOLUÇÃO -

1. (a) $\{$ó, u, a, ê, í$\}$.
   (b) $\{$Estatística I, Cálculo I-A, Geometria Analítica, Exercícios de Geometria Analítica, Lógica, Números e Funções$\}$.
   (c) $\{$Monte Everest, K2, Kangchenjunga$\}$.
   (d) $\{2\}$.
   (e) $\emptyset$.

2. (a) Falso. *Justificativa:* Apagando as chaves e as vírgulas que delimitam A, "sobram" os seguintes elementos de A: $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3,4\}$ $\{5,6\}$ $\{7,8,9\}$ 10. Assim, A tem 6 elementos.
   (b) Verdadeiro. *Justificativa:* Como vimos em (i), A tem 6 elementos.
   (c) Falso. *Justificativa:* 1 não ocorre na lista dos elementos de A.
   (d) Verdadeiro. *Justificativa:* Temos que $1 \in \{1\}$ e $\{1\}$ ocorre na lista dos elementos de A.
   (e) Verdadeiro. *Justificativa:* Como vimos em (iv), $\{1\}$ ocorre na lista dos elementos de A.

3. (a) Falso. *Justificativa:* Apagando as chaves que delimitam $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ "sobra" um único elemento: $\{\{\{\emptyset\}\}\}$. Assim, por exemplo, $\emptyset \notin \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$.
   (b) Verdadeiro. *Justificativa:* Apagando as chaves que delimitam $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ "sobram" dois elementos: $\emptyset$ $\{\emptyset\}$. Assim, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tem dois elementos.
   (c) Falso. *Justificativa:* Por exemplo, $\emptyset \in \{\emptyset, 1, \{2,3\}, \{4,5,6\}, 7, 8, 9, \{10\}\}$, mas $\emptyset \notin \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

4. (a) *Resposta:* $\mathsf{e} \in A$.
   Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Como a letra e é um dos elementos de A, temos que $\mathsf{e} \in A$. Como a letra e não é um conjunto, **não** temos que $\mathsf{e} \subseteq A$.

(b) *Resposta:* $\mathsf{i} \ldots\ldots A$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Como a letra i não é um dos elementos de A, **não** temos que $\mathsf{i} \in A$. Como a letra i não é um conjunto, também **não** temos que $\mathsf{i} \subseteq A$.

(c) *Resposta:* $\mathsf{o} \in A$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Como a letra o é um dos elementos de A, temos que $\mathsf{o} \in A$. Como a letra o não é um conjunto, **não** temos que $\mathsf{o} \subseteq A$.

(d) *Resposta:* $\{\mathsf{o}\} \subseteq A$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Já o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ possui um único elemento, que é a letra o. Como a letra o é o único elemento de $\{\mathsf{o}\}$ e é também um dos elementos de A, temos que todos os elementos de $\{\mathsf{o}\}$ são também elementos de A. Logo, $\{\mathsf{o}\} \subseteq A$. Como o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ não é um dos elementos de A, **não** temos que $\{\mathsf{o}\} \in A$.

(e) *Resposta:* $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \ldots\ldots A$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Já o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Como tanto a letra e quanto a letra o são elementos de A, temos que todos os elementos de $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ são também elementos de A. Logo, $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \subseteq A$. Como o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ não é um dos elementos de A, **não** temos que $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \in A$.

(f) *Resposta:* $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \ldots\ldots A$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto A, vemos que A possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Já o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ possui dois elementos, que são a letra e e a letra i. Como a letra i não é um dos elementos de A, temos que o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ possui um elemento que não é elemento de A. Logo, **não** temos que $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \subseteq A$. Como o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ não é um dos elementos de A, **não** temos que $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \in A$.

5. (a) *Resposta:* $\mathsf{i} \ldots\ldots B$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Como a letra i não é um dos elementos de B, **não** temos que $\mathsf{i} \in B$. Como a letra i não é um conjunto, também **não** temos que $\mathsf{i} \subseteq B$.

(b) *Resposta:* $\mathsf{o} \in B$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Como a letra o é um dos elementos de B, temos que $\mathsf{o} \in B$. Como a letra o não é um conjunto, **não** temos que $\mathsf{o} \subseteq B$.

(c) *Resposta:* $\{\mathsf{o}\} \in B$ e $\{\mathsf{o}\} \subseteq B$.
Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Como o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ também é um dos elementos de B, temos que $\{\mathsf{o}\} \in B$.

Como a letra o é o único elemento de $\{\mathsf{o}\}$ e é também um dos elementos de B, temos que todos os elementos de $\{\mathsf{o}\}$ são também elementos de B. Logo, $\{\mathsf{o}\} \subseteq B$.

(d) *Resposta:* $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \in B$.

Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Como o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ é um dos elementos de B, temos que $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \in B$. O conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ possui dois elementos, que são a letra o e a letra e. Como a letra e não é um dos elementos de B, temos que o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$ possui um elemento que não é elemento de B. Logo, **não** temos que $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\} \subseteq B$.

(e) *Resposta:* $A \in B$.

Justificativa: Como $A = \{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, pelo item anterior temos que $A \in B$ e **não** temos que $A \subseteq B$.

(f) *Resposta:* $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \ldots\ldots B$.

Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Já o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ possui dois elementos, que são a letra e e a letra i. Como a letra i não é um dos elementos de B, temos que o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ possui um elemento que não é elemento de B. Logo, **não** temos que $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \subseteq B$. Como o conjunto $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\}$ não é um dos elementos de B, **não** temos que $\{\mathsf{e}, \mathsf{i}\} \in B$.

(g) *Resposta:* $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\} \subseteq B$.

Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Já o conjunto $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\}$ possui dois elementos, que são a letra o e o conjunto $\{\mathsf{o}\}$. Como tanto a letra o quanto o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ são elementos de B, temos que todos os elementos do conjunto $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\}$ são também elementos de B. Logo, temos que $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\} \subseteq B$. Como o conjunto $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\}\}$ não é um dos elementos de B, **não** temos que $\{\mathsf{o}, \{\mathsf{o}\} \in B$.

(h) *Resposta:* $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\} \subseteq B$.

Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Já o conjunto $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\}$ possui dois elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Como tanto o conjunto $\{\mathsf{o}\}$ quanto o conjunto $\{\mathsf{e}\}$ são elementos de B, temos que todos os elementos do conjunto $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\}$ são também elementos de B. Logo, temos que $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\} \subseteq B$. Como o conjunto $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\}\}$ não é um dos elementos de B, **não** temos que $\{\{\mathsf{o}\}, \{\mathsf{e}\} \in B$.

(i) *Resposta:* $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\} \subseteq B$.

Justificativa: Examinando a lista que apresenta o conjunto B, vemos que B possui quatro elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{o}\}$, o conjunto $\{\mathsf{o}, \mathsf{e}\}$, a letra o e o conjunto $\{\mathsf{e}\}$. Já o conjunto $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\}$ possui dois elementos, que são o conjunto $\{\mathsf{e}\}$ e a letra e. Como a letra e não é um dos elementos de B, temos que o conjunto $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\}$ possui um elemento que não é elemento de B. Logo, **não** temos que $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\} \subseteq B$. Como o conjunto $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\}$ não é um dos elementos de B, **não** temos que $\{\{\mathsf{e}\}, \mathsf{e}\} \in B$.

1.7 Exercícios de fixação e revisão

1. Em cada item a seguir, determine se a palavra sublinhada está sendo usada (naquele contexto) como um conjunto ou não.

   (a) Um bolo consiste de uma camada de massa, coberta com uma camada de chocolate.

   (b) Uma urna consiste de várias bolas misturadas, uma de cada cor.

   (c) Um trajeto consiste de uma escadaria, seguida de uma calçada seguida de outra escadaria.

   (d) Uma gaveta consiste de várias bugigangas guardadas.

   (e) Uma vestimenta consiste de um par de sapatos nos pés, uma calça cobrindo as pernas, e uma camisa cobrindo o tórax.

2. Dê exemplo de um objeto que pode ser visto como um conjunto cujos elementos também são conjuntos.

3. Na análise que fizemos sobre uma representação da UFF como um conjunto cujos elementos são conjuntos (página 11), obtivemos:

$$\mathsf{Petrucio} \in \mathsf{GAN} \quad , \quad \mathsf{GAN} \in \mathsf{IME} \; , \quad \text{e} \quad \mathsf{IME} \in \mathsf{UFF}.$$

   Agora, com base nessa mesma análise, é correto concluir que $\mathsf{Petrucio} \in \mathsf{UFF}$?

4. Considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & : & \text{formado pelas letras } \mathsf{a}, \mathsf{a}, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{b} \\ B & : & \text{formado pelas letras } \mathsf{a}, \mathsf{b} \\ C & : & \text{formado pela segunda letra da palavra } \mathsf{aba} \\ D & : & \text{formado pelas vogais da palavra } \mathsf{baba} \\ E & : & \text{formado pela letra } \mathsf{a} \end{array}$$

   Classifique como verdadeiro ou falso. Justifique.

   (a) $A = B$.

   (b) $A = C$.

   (c) $B = C$.

   (d) $B = D$.

   (e) $D = E$.

5. Verdadeiro ou falso, justifique.

   (a) $\{3\} \in \{3, 4, 5\}$

   (b) $\{3\} \in \{\{3\}, 4, 5\}$

   (c) $\{3\} \subseteq \{3, 4, 5\}$

   (d) $\{3\} \subseteq \{\{3\}, 4, 5\}$

6. Verdadeiro ou falso, justifique.

   Para $A = \{1, 2, \{1\}\}$, temos:

(a) $1 \subseteq A$
(b) $\{1\} \subseteq A$
(c) $1 \in A$
(d) $\{1\} \in A$
(e) $\{1, \{1\}\} \subseteq A$
(f) $\{2, \{2\}\} \subseteq A$
(g) $\{1, 2\} \in A$
(h) $\{1, 2\} \subseteq A$

7. Considere os conjuntos a seguir.

A: O conjunto de todos os inteiros positivos menores que 10.
B: O conjunto de todos os números primos menores que 11.
C: O conjunto de todos os números ímpares maiores que 1 e menores que 6.
D: O conjunto cujos únicos elementos são 1 e 2.
E: O conjunto cujo único elemento é 1.
F: O conjunto de todos os números primos menores que 8.

(a) Determine as relações de inclusão entre estes conjuntos.
(Quais destes conjuntos estão contidos em quais?)
(b) Defina estes conjuntos por lista.
(c) Defina estes conjuntos por propriedade.

Capítulo 2

Provas

Neste capítulo, começamos a estudar provas matemáticas. Veremos como escrever uma prova (e uma refutação) de inclusões e igualdades entre conjuntos e também de generalizações de implicações e de generalizações de bi-implicações.

2.1 O problema de provar uma inclusão

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Considere que A e B são tais que *sabemos* que A é um subconjunto de B. Queremos justificar este fato, de modo que qualquer pessoa que tenha dúvida sobre se $A \subseteq B$, fique *convencida* de que, de fato, $A \subseteq B$. Como isto pode ser feito?

Primeira ideia

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Para justificar que $A \subseteq B$, *basta* fazer o seguinte:

1. Pegar um elemento "*genérico*" do universo.
2. Supor que esse objeto satisfaz a propriedade que define o conjunto A.
3. Explicar por que ele satisfaz a propriedade que define o conjunto B.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que A está, de fato, contido em B.

Quando falamos acima em pegar um elemento "genérico" do universo, queremos dizer que vamos pegar um elemento do universo e não vamos usar nenhuma informação sobre ele além das propriedades desse elemento que ele compartilha com todos os outros elementos do universo. Em seguida, ao supor que ele pertence ao conjunto A, vamos considerar também propriedades desse elemento que ele compartilha com todos os outros elementos de A. Para não gerar um mal entendido, usamos uma letra (usualmente chamada de *variável*) para representar esse elemento do universo, ao invés de usar o nome desse elemento. Assim, diminui o risco de usar alguma propriedade que esse elemento possui mas não compartilha com todos os outros, sem querer.

O que descrevemos acima é um combinação de dois *métodos de prova*, o *Método da Generalização* e o *Método da Suposição*. Escrevemos um livrinho sobre métodos de prova para um minicurso no II Colóquio de Matemática da Região Sul [1], que indicamos para quem quiser entender melhor o assunto. O Método de Generalização é apresentado no Capítulo 7 e o Método da Suposição é apresentado no Capítulo 6. Aqui vamos nos concentrar em *usar* os métodos.

Pondo a ideia em prática

Dados o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\}$ e o conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\}$, temos que $A \subseteq B$? Estamos convencidos que sim? Vamos *justificar* isto?

A justificativa de que uma inclusão é verdadeira é chamada uma prova da inclusão. Um esboço da prova de que

$$\{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\} \subseteq \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\}$$

é o seguinte:

Um múltiplo de 4 é da forma $4k$. Sabemos que $4k = 2(2k)$. Assim, $4k$ é múltiplo de 2.

Como redigir uma prova de uma inclusão

Dados os conjuntos A e B, tais que $A \subseteq B$, a prova da inclusão deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\text{Prova:}}$ ao iniciar a prova.
2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \in \mathcal{U}.}$ ou qualquer frase contendo a mesma informação, onde $\mathcal{U}$ é o universo usado na apresentação dos conjuntos A e B.
3. Escreva $\boxed{\text{Suponhamos que } x \in A.}$ ou qualquer frase contendo a mesma informação.
4. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que $x \in B$.
5. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \in B.}$ ou qualquer frase contendo a mesma informação.
6. Escreva ■ para terminar a prova.

Transformando o esboço em uma prova

Prova: Seja $x \in \mathbb{N}^*$. Suponhamos que $x \in A = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\}$. Daí, x é um múltiplo de 4. Assim, $x = 4k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $x = 2(2k)$ e $2k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, x é um múltiplo de 2. Logo, $x \in B = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\}$. ■

Exercício 1 *Prove que o conjunto* $C = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é divisível por } 6\}$ *é subconjunto de* $D = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é par e divisível por } 3\}$.

2.2 Refutações de inclusões

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Considere que A e B são tais que *sabemos* que A **não** é um subconjunto de B. Queremos justificar este fato, de modo que qualquer pessoa que tenha dúvida sobre se $A \subseteq B$, fique *convencida* de que, de fato, $A \nsubseteq B$. Como isto pode ser feito?

Primeira ideia

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Para justificar que $A \nsubseteq B$, *basta* fazer o seguinte:

1. Encontrar um elemento específico em A, ou seja, um objeto que satisfaz a propriedade que define A.

2. Explicar por que ele não satisfaz a propriedade que define B.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que o conjunto A, de fato, não está contido no conjunto B.

Pondo a ideia em prática

Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\}$, temos que $A \subseteq B$? Estamos convencidos de que não? Vamos *justificar* isto?

Refutando uma inclusão

A justificativa de que uma inclusão não é verdadeira é chamada uma refutação da inclusão. Um esboço da refutação de que

$$\{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\} \subseteq \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\}$$

é o seguinte:

$$\boxed{\text{2 é um múltiplo de 2, mas 2 não é um múltiplo de 4.}}$$

Como redigir uma refutação de uma inclusão

Dados os conjuntos A e B, tais que $A \nsubseteq B$, a refutação da inclusão deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\text{Considere } a \in A.}$, onde a é um elemento específico de A.

2. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que $\boxed{a \notin B}$.

3. Escreva $\boxed{\text{Assim, } A \nsubseteq B.}$ para terminar a refutação.

Observe que a refutação de uma inclusão não recebe o mesmo status de uma prova: não escrevemos "Prova:" e nem escrevemos "■".

Transformando o esboço em uma refutação

Considere $2 \in A = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 2\}$. Observe que $0 < 2 < 4$. Portanto, 2 não é um múltiplo de 4. Logo, $2 \notin B = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é múltiplo de } 4\}$. Assim, $A \nsubseteq B$.

Exercício 2 *O conjunto* $C = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é divisível por } 3\}$ **não** *é subconjunto de* $D = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é divisível por } 6\}$. *Justifique.*

2.3 Provas de igualdades

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Considere que A e B são tais que *sabemos* que A é igual a B. Queremos justificar este fato, de modo que qualquer pessoa que tenha dúvida sobre se $A = B$, fique *convencida* de que, de fato, $A = B$. Como isto pode ser feito?

Primeira ideia

Dados dois conjuntos A e B, já vimos que os enunciados seguintes são equivalentes:

- $A = B$, e
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Esta observação pode ser convertida em um método para a prova de que dois conjuntos dados são iguais, baseado na maneira como provamos inclusões.

Vamos considerar o caso em que A e B são conjuntos definidos por propriedades. Neste caso, para justificar que $A = B$, *basta* fazer o seguinte:

1. Provar que $A \subseteq B$, ou seja:
   (a) Pegar um objeto genérico no universo usado para definir os conjuntos A e B.
   (b) Supor que esse objeto satisfaz a propriedade que define o conjunto A.
   (c) Explicar por que ele satisfaz a propriedade que define o conjunto B.
2. Provar que $B \subseteq A$, ou seja:
   (a) Pegar um objeto genérico no universo usado para definir os conjuntos A e B.
   (b) Supor que esse objeto satisfaz a propriedade que define o conjunto B.
   (c) Explicar por que ele satisfaz a propriedade que define o conjunto A.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que, de fato, $A = B$. *(Como você talvez estivesse esperando, a prova de uma igualdade é a prova de duas inclusões.)*

Exercício 3 *Dados os conjuntos* $C = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é divisível por } 6\}$ *e* $D = \{x \in \mathbb{N}^* : x \textit{ é par e é divisível por } 3\}$, *prove que* $C = D$.

Problema 2.1 *1. Elabore e descreva um critério, baseado nos critérios anteriores, de como refutar uma igualdade entre dois conjuntos dados.*

2. Use o critério elaborado para justificar o fato de que os conjuntos $E = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 20x + 91 = 0\}$ *e* $F = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo}\}$ **não** *são iguais.*

2.4 Provas de generalizações de implicações

Sejam A e B conjuntos. Afirmar que $A \subseteq B$ é o mesmo que afirmar que:

$$\boxed{\text{para todo } x, \text{ se } x \in A, \text{ então } x \in B}$$

ou, de maneira genérica, o mesmo que afirmar que:

$$\boxed{\text{para todo } x, \text{ se } x \text{ é } P, \text{ então } x \text{ é } Q}$$

(onde P e Q são propriedades.)

Uma generalização de uma implicação é um enunciado que **pode** ser reescrito na forma:

$$\boxed{\text{para todo } x, \text{ se } x \text{ é } P, \text{ então } x \text{ é } Q}$$

Enunciados desse tipo são chamados de *generalização* pela presença do "para todo" e são a generalização de uma *implicação* pela presença do "se...então". Na linguagem Matemática, o "para todo" é um quantificador, conhecido como quantificador universal, e o "se...então" é um conectivo. Conectivos juntam enunciados, formando enunciados novos. Os enunciados formados pelo conectivo "se...então" são chamados de implicações. Dizemos que "x é P" é o antecedente e "x é Q" é o consequente da implicação "se x é P, então x é Q".

Exemplo 2.1 *Os enunciados a seguir são generalizações de implicações.*

(a) toda função contínua é diferenciável

(b) todo natural é real

(c) cada número possui um fator primo

(d) os números são todos inteiros

Problema 2.2 *1. Reescreva os enunciados do exemplo anterior na forma*

para todo x, se x é P, então x é Q

2. Reescreva o seguinte enunciado como uma generalização de uma implicação:

um número é ímpar caso ele seja primo e maior do que 2

O problema de provar uma generalização de implicação

Tudo o que fizemos até agora pode ser adaptado para a prova de generalizações de implicações, independente de elas estarem diretamente associadas a inclusões. Seja:

para todo x, se x é P, então x é Q

uma generalização de uma implicação que sabemos ser verdadeira. Queremos justificar este fato, de modo que qualquer pessoa que tenha dúvida sobre se:

para todo x, se x é P, então x é Q

é verdadeira fique *convencida* de que, de fato, ela é. Como isto pode ser feito?

Primeira ideia

Para justificar que:

para todo x, se x é P, então x é Q

basta fazer o seguinte:

1. Pegar um objeto genérico em um universo apropriado.
2. Supor que esse objeto satisfaz a propriedade P.
3. Explicar por que esse objeto satisfaz a propriedade Q.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que, de fato, o enunciado

para todo x, se x é P, então x é Q

é verdadeiro.

Como redigir uma prova de uma generalização de implicação

Dada uma generalização de implicação

para todo x, se x é P, então x é Q

a prova de que ela é verdadeira deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\text{Prova:}}$ ao iniciar a prova.
2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \text{ um elemento do universo } \mathcal{U}.}$ ou qualquer outra frase contendo a mesma informação.
3. Escreva $\boxed{\text{Suponhamos que } x \text{ é } P.}$ ou qualquer outra frase contendo a mesma informação.
4. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que x é Q.
5. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \text{ é } Q.}$ ou qualquer outra frase contendo a mesma informação.
6. Escreva $\blacksquare$ para terminar a prova.

Uma opção de modelo de redação da prova de uma generalização de implicação

para todo x, se x é P, então x é Q

que pode ser usada quando não queremos explicitar o universo de discurso, é a seguinte:

1. Escreva $\boxed{\text{Prova:}}$ ao iniciar a prova.
2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \text{ tal que } x \text{ é } P.}$ ou qualquer outra frase contendo a mesma informação.
3. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que x é Q.
4. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \text{ é } Q.}$ ou qualquer outra frase contendo a mesma informação.

5. Escreva ■ para terminar a prova.

Exercício 4 *Prove as seguintes generalizações de implicações:*

(a) Para todo x, se x é par, então x^2 é par.

(b) Para todos a e b, se 3 divide a e 3 divide b, então 3 divide $a + b$.

(c) A soma de números pares é um número par.

Problema 2.3 *1. Elabore e descreva um critério, baseado nos critérios anteriores, de como refutar uma generalização de implicação.*

2. Use o critério elaborado para justificar o fato de que o seguinte enunciado é falso:

Toda potência de números irracionais é um número irracional.

2.5 Provas de generalizações de bi-implicações

Sejam A e B conjuntos. A igualdade $A = B$ pode ser reescrita do seguinte modo:

para todo x, temos que $x \in A$ se, e somente se, $x \in B$

ou, de maneira genérica, como

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

Uma generalização de uma bi-implicação é um enunciado que **pode** ser reescrito na forma

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

Na linguagem Matemática, o "se e somente se" é um conectivo. Enunciados formados pelo uso desse conectivo são chamados de bi-implicações.

O problema de provar uma generalização de bi-implicação

O que fizemos anteriormente pode ser adaptado para a prova de generalizações de bi-implicações, independente de elas estarem diretamente associadas a igualdades. Seja

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

uma generalização de uma bi-implicação que sabemos ser verdadeira. Queremos justificar este fato, de modo que qualquer pessoa que tenha dúvida sobre se o enunciado

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

é verdadeiro fique *convencida* de que, de fato, ele é um enunciado verdadeiro. Como isto pode ser feito?

Primeira ideia

Como você já deve estar esperando, a prova da generalização de uma bi-implicação é simplesmente a prova de duas generalizações de implicações. Para justificar que

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

basta fazer o seguinte:

1. Provar que "para todo x, se x é P, então x é Q", ou seja:
   (a) Pegar um objeto genérico em um universo apropriado.
   (b) Supor que esse objeto satisfaz a propriedade P.
   (c) Explicar por que ele satisfaz a propriedade Q.
2. Provar que "para todo x, se x é Q, então x é P", ou seja:
   (a) Pegar um objeto genérico em um universo apropriado.
   (b) Supor que esse objeto satisfaz a propriedade Q.
   (c) Explicar por que ele satisfaz a propriedade P.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que, de fato, o enunciado

para todo x, temos que x é P se, e somente se, x é Q

é verdadeiro.

Problema 2.4 *1. Elabore e descreva um critério, baseado nos critérios anteriores, de como refutar uma generalização de bi-implicação.*

2. Use o critério elaborado para justificar o fato de que o seguinte enunciado é falso:

Um número é primo se, e somente se,
os únicos divisores dele são o 1 e ele mesmo.

2.6 Exercício resolvido

(I) Verdadeiro ou falso? Justifique.

1. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. *(Transitividade de $\subseteq$)*
2. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.

(II) Prove que a soma de ímpares é par.

- RESOLUÇÃO -

(I)

1. *Resposta:* Verdadeiro.

   Prova:

   Sejam A, B e C conjuntos em um universo $\mathcal{U}$.

   Suponhamos que $A \subseteq B$ (1) e $B \subseteq C$ (2).

   Seja $x \in \mathcal{U}$.

   Suponhamos que $x \in A$.

   Daí e de (1), temos que $x \in B$.

   Daí e de (2), temos que $x \in C$.

   Logo, $A \subseteq C$. ■

2. *Resposta:* Falso.

   Justificativa: Considere os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{x : x \text{ é dígito ou letra}\} = \{0, 1, 2, \ldots, 9, a, b, c, \ldots, z\}$ e $C = \{x : x \text{ é letra}\} = \{a, b, c, \ldots, z\}$.

   Sabemos que $A \subseteq B$, pois toda vogal é uma letra (e, portanto, é um dígito ou uma letra). Sabemos também que $B \not\subseteq C$, pois $1 \in B$ e $1 \notin C$.

   Mas $A \subseteq C$, pois toda vogal é uma letra.

(II)

Para todo número natural x, se x é soma de números naturais ímpares, então x é par.

Prova:

Seja x um número natura.

Suponhamos que x é soma de números naturais ímpares.

Daí, $x = n + m$, onde n e m são números naturais ímpares.

Como n e m são números naturais ímpares, temos que $n = 2a + 1$ e $m = 2b + 1$, onde a e b são números naturais.

Daí, $x = (2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$.

Como a e b são números naturais, temos que $a + b + 1$ é número natural.

Logo, x é par. ■

2.7 Exercícios de fixação e revisão

1. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 4\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é divisível por 3 e é par}\}, \\ D &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é divisível por } 6\}. \end{aligned}$$

   Responda e justifique:

   (a) $A \subseteq B$? (b) $B \subseteq A$? (c) $C \subseteq D$? (d) $D \subseteq C$? (e) $C = D$?

2. Verdadeiro ou falso? Justifique.
   (a) Os divisores de 24 são números pares.
   (b) Todo múltiplo de 3 é ímpar.
   (c) A soma de números pares é um número par.
   (d) Para todos os números naturais a, b, c, se b é múltiplo de a e c é múltiplo de a, então bc é múltiplo de a^2.
   (e) Para todos os números naturais a, b, c, se bc é múltiplo de a, então b é múltiplo de a e c é múltiplo de a.

3. Verdadeiro ou falso? Para todos os conjuntos A, B, e C:
   (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
   (b) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq B$, então $A \subseteq C$.
   (c) Se $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ e $C \subseteq A$, então $A = B = C$.

   Justifique suas respostas.

Capítulo 3

Método de Prova por Indução

Neste capítulo, apresentamos o Método de Prova por Indução. O Método de Prova por Indução é adequado para provar casos particulares de inclusão de conjuntos. Quando queremos provar que $A \subseteq B$ e A é o conjunto dos números naturais, podemos usar esse método de prova.

3.1 Igualdade de Gauss

Vamos iniciar com um exemplo. Dados o conjunto $A = \mathbb{N}^*$ e o conjunto

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\},$$

sabemos que $A \subseteq B$. Se tentarmos fazer a prova da forma como discutimos anteriormente, nossa tentativa teria o seguinte formato:

<u>Prova</u>:
Seja n um número.
Suponhamos que $n \in \mathbb{N}^*$.

??????????????????????????????????????
Por que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$?
??????????????????????????????????????

Logo, $n \in B$. ■

Precisamos de uma boa ideia para explicar porque essa igualdade vale para qualquer número natural não nulo. Diz a lenda que o grande matemático Carl Friedrich Gauss (1777–1855), foi apresentado a essa questão na escola, quando criança, teve uma boa ideia e elaborou a seguinte prova:

<u>Prova</u> (atribuída a *Gauss*, ± 1787):
Seja $n \in \mathbb{N}^*$.
Somando de 1 até n duas vezes, de um jeito esperto, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & +(n-1)+ & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + \quad 2 \quad + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & +(n+1)+ & (n+1) \end{array}$$

Assim, $2(1+2+\cdots+n) = n(n+1)$.
E, portanto, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Logo, $n \in B$. ■

3.2 A estrutura dos naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ possui uma certa estrutura. Os naturais são formados a partir de 0, por aplicações sucessivas da operação $+1$.

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} \cdots \xrightarrow{+1} n \xrightarrow{+1} n{+}1 \xrightarrow{+1} \cdots$$

Esta estrutura nos leva a um novo método para a prova de inclusões $\mathbb{N} \subseteq A$.

3.3 O método de indução matemática

Se queremos provar que $\mathbb{N} \subseteq A$ ou, dizendo de outra forma, queremos provar que

para todo x, se $x \in \mathbb{N}$, então x é P

onde P é a propriedade que define A, *basta* fazer o seguinte:

(B) Mostrar que P vale para o primeiro número natural, ou seja, mostrar que 0 é P.

Em seguida, mostrar que, se um determinado número natural possui a propriedade P, então o número natural seguinte também possui a propriedade P. Ou seja:

(H) Supor que n é P, para um determinado número natural n.

(P) Mostrar que $n+1$ é P, usando o fato de que n é P.

Provando generalizações da forma "para todo x, se $x \in \mathbb{N}$, então x é P"

Dada uma propriedade P, a prova de que

para todo x, se $x \in \mathbb{N}$, então x é P

pelo método de indução matemática deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva <u>Prova</u> (por indução em x): ao iniciar a prova.

2. Escreva Base: .

3. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que 0 é P.

4. Escreva
   $\boxed{\text{Hipótese: Suponhamos que, para um certo natural } x\text{, temos que } x \text{ é } P.}$
   ou uma outra frase contendo a mesma informação.
5. Escreva $\boxed{\text{Passo:}}$.
6. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que $x+1$ é P.
7. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \text{ é tal que } x+1 \text{ é } P.}$ ou uma outra frase contendo a mesma informação.
8. Escreva $\blacksquare$ para terminar a prova.

Um exemplo

Usando o método de indução matemática, vamos provar que, para todo natural x, temos que

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^x = \frac{3^{x+1}-1}{2},$$

ou seja, vamos provar que

$$\textsf{para todo } x\textsf{, se } x \in \mathbb{N}\textsf{, então } 3^0 + 3^1 \cdots + 3^x = \frac{3^{x+1}-1}{2}.$$

Nesse exemplo, P é a propriedade de a soma das potências de 3 anteriores à n-ésima potência ser igual à metade de $3^n - 1$. Ou seja: Assim:

$$x \text{ é } P \quad : \quad 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^x = \frac{3^{x+1}-1}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 0 \text{ é } P \quad &: \quad 3^0 = \frac{3^{0+1}-1}{2} \\ x+1 \text{ é } P \quad &: \quad 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^x + 3^{x+1} = \frac{3^{(x+1)+1}-1}{2} \end{aligned}$$

Vejam como é simples a prova, usando o Método de Prova por Indução. Não precisamos ter nenhuma grande ideia, apenas fazer algumas manipulações aritméticas. E não é difícil saber quais manipulações usar, olhando o que temos (na hipótese de indução) e olhando onde queremos chegar (no passo).

Prova (por indução em x):
Base:
Temos que $3^0 = 1$.
Além disso, $\dfrac{3^{0+1}-1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.
Logo, $3^0 = \dfrac{3^{0+1}-1}{2}$.
Hipótese:
Suponhamos que, para um certo natural x, temos que $3^0 + 3^1 + \cdots + 3^x = \dfrac{3^{x+1}-1}{2}$.
Passo:
Pela hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^x + 3^{x+1} &= \frac{3^{x+1}-1}{2} + 3^{x+1} \\ &= \frac{3^{x+1}-1+2\cdot 3^{x+1}}{2} \\ &= \frac{3\cdot 3^{x+1}-1}{2} \\ &= \frac{3^{(x+1)+1}-1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $3^0 + 3^1 + \cdots + 3^x + 3^{x+1} = \dfrac{3^{(x+1)+1}-1}{2}$. ■

A estrutura de $\mathbb{N}$

Dado $a \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : x \geq a\}$ possui uma estrutura análoga à estrutura de $\mathbb{N}$. Os naturais maiores ou iguais a um certo valor a são formados a partir de a, por aplicações sucessivas da operação $+1$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "+1"] & (a{+}1) \arrow[r, bend left, "+1"] & (a{+}2) \arrow[r, bend left, "+1"] & \cdots \arrow[r, bend left, "+1"] & (a{+}n) \arrow[r, bend left, "+1"] & (a{+}n{+}1) \arrow[r, bend left, "+1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Essa analogia nos permite utilizar o método de indução matemática para a prova de generalizações "para todo natural x, se $x \geq a$, então x é P". Se queremos provar que

para todo natural x maior ou igual a a, temos que x é P

basta fazer o seguinte:

(B) Mostrar que a possui a propriedade P, isto é, provar que a é P.

Em seguida, mostrar que, se um determinado número natural n maior ou igual a a possui a propriedade P, então o número natural seguinte também possui a propriedade P. Ou seja,

(H) Supor que n é P, para um determinado número natural n tal que $n \geq a$.

(P) Mostrar que $n+1$ é P, usando o fato de que n é P.

Exercício 5 *Usando o método de indução matemática, prove que*

$$\text{para todo natural } x\text{, se } x \geq 1\text{, então } 1 + 2 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

3.4 Indução forte

O método de indução pode ser formulado de outra maneira, chamada de "Indução forte": se queremos provar que

$$\text{para todo natural } x \text{ maior ou igual a } a\text{, temos que } x \text{ é } P$$

basta fazer o seguinte:

(B) Mostrar que a possui a propriedade P, ou seja, mostrar que a é P.

Em seguida, mostrar que, se todos os naturais k entre a e n possuem a propriedade P, então $n + 1$ também possui a propriedade P. Ou seja:

(H) Supor que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $a \leq k \leq n$, então k é P.

(P) Mostrar que $n + 1$ é P, usando a hipótese de indução, ou seja, usando o fato de que para todo $k \in \mathbb{N}$, se $a \leq k \leq n$, então k é P.

Exercício 6 *Prove que todo número natural maior ou igual a* 2 *pode ser escrito como produto de números primos.*

Para quem quer mais

O livrinho do Prof Abramo Hefez [2] apresenta o Princípio de Indução Matemática e vários exemplos de aplicação desse princípio. A leitura do Capítulo 1, Seção 1.1 (até a página 14, gabarito na página 83) é especialmente recomendada. O Capítulo 8 do livro [1] apresenta a indução matemática no contexto dos métodos de prova.

3.5 Exercício resolvido

Prove por indução que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se $n \geq 7$, então $n! > 3^n$.

(c) Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que 6 divide $n^3 - n$.

- RESOLUÇÃO -

(a) Prova (por indução em n):

Base Sabemos que $\dfrac{1(3\cdot 1-1)}{2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Logo, $1 = \dfrac{1(3\cdot 1-1)}{2}$.

Hipótese Suponhamos que, para um certo natural n, temos que

$$1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Passo Pela Hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3(n+1)-2) &= \\
\frac{n(3n-1)}{2}+(3(n+1)-2) &= \\
\frac{3n^2-n}{2}+\frac{2(3(n+1)-2)}{2} &= \\
\frac{3n^2-n+6(n+1)-4}{2} &= \\
\frac{3n^2-n+6n+6-4}{2} &= \\
\frac{3n^2+5n+2}{2}&.
\end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} &= \\
\frac{(n+1)(3n+3-1)}{2} &= \\
\frac{(n+1)(3n+2)}{2} &= \\
\frac{3n^2+2n+3n+2}{2} &= \\
\frac{3n^2+5n+2}{2}&.
\end{aligned}$$

Logo, $1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3(n+1)-2) = \dfrac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$. ■

(b) Prova (por indução em n):

Base Sabemos que $140 > 81$ e $4 > 3$.
Logo, $140\cdot 4\cdot 3\cdot 3 > 81\cdot 3\cdot 3\cdot 3$.
Logo, $14\cdot 10\cdot 4\cdot 3\cdot 3 > 3^4\cdot 3^3$.

Logo, $2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 > 3^7$.
Logo, $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 > 3^7$.
Logo, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 > 3^7$.
Logo, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 3^7$.
Logo, $7! > 3^7$.

Hipótese Suponhamos que, para um certo natural $n \geq 7$, temos que $n! > 3^n$.

Passo Pela Hipótese de indução, temos que $n \geq 7$ e $n! > 3^n$.
Como $n \geq 7$, temos que $n+1 \geq 8$. Daí, $n+1 > 3$.
Como $n+1 > 3$ e $n! > 3^n$, temos que $(n+1)n! > 3 \cdot 3^n$.
Mas $(n+1)n! = (n+1)!$ e $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$.
Logo, $(n+1)! > 3^{n+1}$. ■

(c) Prova (por indução em n):

Base Sabemos que $0^3 - 0 = 0 - 0 = 0 = 6 \cdot 0$. Logo, 6 divide $0^3 - 0$.

Hipótese Suponhamos que, para um certo natural n, temos que 6 divide $n^3 - n$.

Passo Sabemos que:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= \\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 &= \\ n^3 - n + 3n^2 + 3n + 1 - 1 &= \\ (n^3 - n) + 3(n^2 + n). \end{aligned}$$

Pela Hipótese de indução, temos que $n^3 - n = 6a$, com $a \in \mathbb{N}$.
Logo, $(n+1)^3 - (n+1) = 6a + 3(n^2 + n)$.
Pelo Lema[1], temos que $n^2 + n = 2b$, com $b \in \mathbb{N}$.
Assim, $(n+1)^3 - (n+1) = 6a + 3(2b) = 6(a+b)$, com $a + b \in \mathbb{N}$.
Logo, 6 divide $(n+1)^3 - (n+1)$. ■

Lema Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que 2 divide $n^2 + n$.

Prova (por indução em n):

Base Sabemos que $0^2 + 0 = 0 + 0 = 0 = 2 \cdot 0$. Logo, 2 divide $0^2 + 0$.

Hipótese Suponhamos que, para um certo natural n, temos que 2 divide $n^2 + n$.

Passo Sabemos que:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+1) &= \\ n^2 + 2n + 1 + n + 1 &= \\ n^2 + n + 2n + 2 &= \\ (n^2 + n) + 2(n+1). \end{aligned}$$

Pela Hipótese de indução, temos que $n^2 + n = 2c$, com $c \in \mathbb{N}$.
Logo, $(n+1)^2 + (n+1) = 2c + 2(n+1) = 2(c + n + 1)$, com $c+n+1 \in \mathbb{N}$.
Logo, 2 divide $(n+1)^2 + (n+1)$. ■

[1] O Lema está provado logo em seguida.

3.6 Exercícios de fixação e revisão

1. Prove por indução que, para qualquer natural n:

   (a) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

   (b) $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{(n+1)}-1$.

   (c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$, com $n\geq 1$.

   (d) $0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$.

   (e) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.
   (Neste item, você pode usar o resultado do item 1a).

   (f) $2n+1<n^2$, com $n\geq 3$.

   (g) $n^2<2^n$, com $n\geq 5$.
   (Neste item, você pode usar o resultado do item 1f).

   (h) $n!>n^2$, com $n\geq 4$.

   (i) n^2+n é divisível por 2.

   (j) n^3-n é múltiplo de 6.

   (k) 3 divide n^4-4n^2.

   Dica – nos itens 1i, 1j e 1k, reescreva a informação dada no formato de uma igualdade (para ficar mais fácil de manipular a informação). Lembre que, dados a e b números naturais, dizer que a divide b é o mesmo que dizer que b é divisível por a ou que b é múltiplo de a, ou seja: $\boxed{a \text{ } \underline{\text{divide}} \text{ } b \text{ quando } b=ac, \text{ para algum } c\in\mathbb{N}.}$

Provas por Indução no Cálculo (ou na Análise)

Prove por indução que:

1. Para todo $a\in\mathbb{R}$, se $a>-1$, então para todo $n\in\mathbb{N}$, temos que:
$$(1+a)^n\geq 1+na.$$
(Desigualdade de Bernoulli)

2. Para todo $a\in\mathbb{R}$, se $a\neq 1$, então para todo $n\in\mathbb{N}^*$, temos que:
$$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}.$$

3. Para todo $a\in\mathbb{R}$, se $a>1$, então a sequência $(a,a^2,a^3,\ldots,a^n,\ldots)$ é limitada inferiormente.

4. A sequência $\left(\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right)$ é monótona decrescente.

5. Para todo $a\in\mathbb{R}$, se $a>1$, então a sequência $(a,\sqrt[2]{a},\sqrt[3]{a},\ldots,\sqrt[n]{a},\ldots)$ é monótona decrescente e limitada.

6. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se $0 < a < 1$, então a sequência

$$(a^1\ ,\ \ a^1 + a^2\ ,\ \ a^1 + a^2 + a^3\ ,\ \ \ldots\ ,\ \ a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n, \ldots)$$

é monótona crescente e limitada.

7. A sequência

$$\left(\frac{1}{1!}\ ,\ \ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\ ,\ \ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\ ,\ \ \ldots\ ,\ \ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ,\ \ \ldots\right)$$

é monótona crescente e limitada.

8. Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\int x^n e^x \, dx = e^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \, \frac{n!}{k!} \cdot x^k \right) + C.$$

Dica:use a seguinte igualdade (que pode ser provada usando integração por partes):

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

Para os itens 3 a 7, lembre que uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ *de números reais é*

- *limitada inferiormente quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $c \leq x_n$;
- *limitada superiormente quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $c \geq x_n$;
- *limitada quando ela é limitada inferiormente e superiormente*;
- *monótona crescente quando para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $x_n < x_{n+1}$;
- *monótona decrescente quando para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $x_n > x_{n+1}$.

Capítulo 4

Operações com conjuntos

Neste capítulo, iniciamos o estudo das operações sobre conjuntos. Vamos falar sobre dois conjuntos especiais, o conjunto universo e o conjunto vazio, e introduzir as operações de interseção, união e complementação de conjuntos.

4.1 Conjunto universo

Para definir um conjunto por listagem, devemos utilizar *objetos* que, supostamente, existem antes da listagem. Para definir um conjunto por propriedade devemos utilizar um *conjunto* que, supostamente, existe antes da definição por propriedade, e uma *propriedade*. Para que não seja preciso especificar objetos ou conjuntos prévios particulares a cada vez que usamos esses procedimentos de definição, admitimos a existência de um conjunto único que contém todos os conjuntos que são necessários, em um dado contexto.

Definição 4.1 *O conjunto universo, denotado por $\mathcal{U}$, é o conjunto que contém todos os conjuntos que são necessários, em um dado contexto.*

Propriedade básica do conjunto universo

Para todo objeto x, temos que $x \in \mathcal{U}$.

4.2 Conjunto vazio

O método de definição por propriedade afirma que, para qualquer universo $\mathcal{U}$ e qualquer propriedade $P(x)$, o conjunto $\{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$ existe. Assim, tomando o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais como universo, o "conjunto" $Z = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$ existe. Mas, como se pode observar, este "conjunto" não possui elementos.

Para que o método de definição por propriedade possa ser aplicado indiscriminadamente, vamos assumir a existência de um *conjunto que não possui elementos.*

Definição 4.2 *O conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, é o conjunto que não possui elementos*[1].

Um conjunto vazio pode ser definido por várias propriedades. Dados o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par e ímpar}\}$ e o conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é primo e } 24 \leq x \leq 28\}$, temos que A e B são vazios. Mas se A e B são vazios, então $A = B$.

[1] O símbolo $\emptyset$, usado para representar o conjunto vazio, é uma letra do alfabeto escandinavo.

A justificativa desse fato é um pouco sutil, mas vamos a ela: sejam A e B conjuntos vazios. Não há elementos em A que não estão em B. Não há elementos em B que não estão em A. Assim, "todos os elementos de A são elementos de B" e "todos os elementos de B são elementos de A". Logo, $A = B$.

Propriedades básicas do conjunto vazio

Para todo conjunto A e todo objeto x, temos que:

(Ø1) Existe um único conjunto $\emptyset$.

(Ø2) $x \notin \emptyset$.

(Ø3) $\emptyset \subseteq A$.

Observe que, em qualquer contexto, para qualquer objeto x, o enunciado $x \in \emptyset$ é falso.

4.3 Relações e operações

Relações atuam sobre objetos, determinando se os objetos estão ou não interligados de uma certa maneira. Por exemplo, igualdade $(=)$ e inclusão $(\subseteq)$ são relações entre conjuntos, amizade é uma relação entre pessoas.

Operações atuam sobre objetos, formando objetos a partir de objetos dados. As definições de conjuntos por listagem e por propriedades podem ser vistas como operações. Definição por listagem atua sobre objetos e forma um conjunto. Definição por propriedade atua sobre um conjunto e uma propriedade e forma um conjunto.

Vamos, agora, estudar as operações mais importantes sobre conjuntos.

4.4 Interseção

Definição 4.3 *Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$. A interseção de A com B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são os objetos do universo $\mathcal{U}$ que pertencem a A e a B simultaneamente.*

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \in A \quad e \quad x \in B\}.$$

Exemplo 4.1 *Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, temos que*

$$A \cap B = \{1, 3\},$$

e dados os conjuntos $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$, temos que

$$\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}.$$

Propriedades básicas de $\cap$

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

($\cap$1) *Associatividade*
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

($\cap$2) *Comutatividade*
$A \cap B = B \cap A.$

($\cap$3) *Elemento neutro*
$A \cap \mathcal{U} = A.$

($\cap$4) *Elemento zero*
$A \cap \emptyset = \emptyset.$

($\cap$5) *Idempotência*
$A \cap A = A.$

($\cap$6) *Monotonicidade*
Se $A \subseteq B$, então $A \cap C \subseteq B \cap C$.

($\cap$7) $A \cap B \subseteq A.$

4.5 União

Definição 4.4 *Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$. A união de A com B, denotado por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são os objetos de $\mathcal{U}$ que pertencem a A, os que pertencem a B e os que pertencem simultaneamente a A e a B.*

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \in A \quad ou \quad x \in B\}$$

Exemplo 4.2 *Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, temos que*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\},$$

e dados os conjuntos $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$, temos que

$$\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}.$$

Propriedades básicas de $\cup$

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

($\cup$1) *Associatividade*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

($\cup$2) *Comutatividade*
$A \cup B = B \cup A.$

($\cup$3) *Elemento neutro*
$A \cup \emptyset = A.$

($\cup$4) *Elemento zero*
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$

($\cup$5) *Idempotência*
$A \cup A = A$.

($\cup$6) *Monotonicidade*
Se $A \subseteq B$, então $A \cup C \subseteq B \cup C$.

($\cup$7) $A \subseteq A \cup B$.

Propriedades relacionando $\cap$ e $\cup$

($\cap\cup$ 1) *Distributividade*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\cap\cup$ 2) *Absorção*
$A \cap (A \cup B) = A$.
$A \cup (A \cap B) = A$.

4.6 Complementação

Definição 4.5 *Seja $A \subseteq \mathcal{U}$. O complemento de A, denotado por $A^{\complement}$, é o conjunto cujos elementos são os objetos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A.*

$$A^{\complement} = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \notin A\}$$

Exemplo 4.3 *Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,3,5,7\}$, no universo $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, temos que*

$$A^{\complement} = \{4,5,6,7\} \quad e \quad B^{\complement} = \{2,4,6\},$$

e dados os conjuntos $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\ldots\}$ e $\mathbb{Z}^* = \{\ldots,-3,-2,-1,1,2,3,\ldots\}$, no universo $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, temos que

$$\mathbb{Z}_+{}^{\complement} = \{\ldots,-3,-2,-1\} \quad e \quad \mathbb{Z}^{*\complement} = \{0\}.$$

Propriedades básicas de $^{\complement}$

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

($^{\complement}$1) *Involutividade*
$A^{\complement\complement} = A$.

($^{\complement}$2) $\mathcal{U}^{\complement} = \emptyset$.

($^{\complement}$3) $\emptyset^{\complement} = \mathcal{U}$.

($^{\complement}$4) *Antimonotonicidade*
Se $A \subseteq B$, então $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$.

Propriedades relacionando $^{\complement}$, $\cap$ e $\cup$

(DeM) *Leis de De Morgan*

$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

(def $\mathcal{U}$) *Elemento simétrico (da união)*

$A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$.

(def $\varnothing$) *Elemento inverso (da interseção)*

$A \cap A^{\complement} = \varnothing$.

4.7 * Provas algébricas

Nesta seção, apresentamos uma técnica de redação de demonstrações que chamamos de *prova algébrica*. Quando provamos enunciados que são igualdades (ou desigualdades) a partir de premissas que também são igualdades (ou desigualdades), podemos apresentar essas provas na forma de uma prova algébrica. Vamos ilustrar essa técnica de redação apresentando provas algébricas de enunciados na *Álgebra de Conjuntos*.

4.7.1 Álgebra de conjuntos

O problema da Álgebra de Conjuntos é identificar propriedades das operações de interseção, união e complementação que podem ser expressas por igualdades e inclusões.

Dados:

- Os símbolos:
  * Letras maiúsculas: $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_n, B_n, C_n, \ldots$
  * Símbolos para conjuntos distinguidos: $\varnothing$, $\mathcal{U}$
  * Símbolos para operações: $\cap, \cup, ^{\complement}$
- Expressões (bem formadas) envolvendo letras, símbolos para conjuntos distinguidos, e símbolos para operações.
- Igualdade e inclusões entre estas operações.

Problema:

- Identificar igualdades e inclusões que são *verdadeiras* para *todos* os conjuntos $A, B, C, \ldots$

4.7.2 Provas algébricas

Vamos agora estudar um outro estilo de redação para demonstrações de enunciados que são generalizações de igualdades ou de inclusões, que chamaremos de *prova algébrica*. O estilo de redação que estudamos inicialmente (e que vamos continuar estudando adiante) será chamado aqui de *prova discursiva*. Uma *prova discursiva* é o que as pessoas na comunidade Matemática chamam de *prova* ou *demonstração*: um texto que apresenta argumentos e explicações de por que um certo resultado matemático é verdadeiro. Nesse sentido, uma prova algébrica é uma prova, com a diferença de que segue um certo formato específico e só é adequada para justificar generalizações de igualdades e inclusões.

A ideia para a apresentação de provas algébricas no contexto da Álgebra de Conjuntos é a seguinte:

(1) Escolher um repertório de igualdades e inclusões que são intuitivamente verdadeiras para todos os conjuntos $A, B, C, \ldots$.

(2) Provar as outras igualdades e inclusões a partir daquelas listadas em (1), usando as propriedades básicas da igualdade e da inclusão.

Exercício 7 *Apresente uma prova algébrica das seguintes inclusão e igualdade:*

(a) $(A \cup B)^{\complement} \subseteq A^{\complement} \cup B^{\complement}$

(b) $A \cap (B \cup C)^{\complement} = (A \cap B^{\complement}) \cap (A \cap C^{\complement})$

Nesse exercício, em cada item, escreva explicitamente as igualdades e inclusões que você considerou intuitivamente verdadeiras para todos os conjuntos e que você usou na prova. Tente escrever também, explicitamente, as propriedades da igualdade e da inclusão que você considerou "básicas" e que você usou na prova.

4.7.3 Igualdades e inclusões básicas

Igualdades e inclusões intuitivamente verdadeiras para todos os conjuntos A, B e C:

(B1) Associatividade de $\cap$ e de $\cup$:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(B2) Comutatividade de $\cap$ e de $\cup$:

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

(B3) Idempotência de $\cap$ e de $\cup$:

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

(B4) Elemento neutro de $\cap$ e de $\cup$:

$A \cap \mathcal{U} = A$

$A \cup \emptyset = A$

(B5) Elemento zero de $\cap$ e de $\cup$:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

(B6) Distributividade de $\cap$ sobre $\cup$, e de $\cup$ sobre $\cap$:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(B7) Involutividade de $^\complement$:
$A^{\complement^\complement} = A$

(B8) Leis de De Morgan:
$(A \cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement$
$(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$

(B9) Leis de absorção:
$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A$

(B10) Definições de $\emptyset$ e $\mathcal{U}$:
$A \cap A^\complement = \emptyset$
$A \cup A^\complement = \mathcal{U}$

(B11) $\emptyset^\complement = \mathcal{U}$

(B12) $\mathcal{U}^\complement = \emptyset$

(B13) $A \cap B \subseteq A$

(B14) $A \subseteq A \cup B$

(B15) Monotonicidade:
Se $B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq A \cap C$.
Se $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq A \cup C$.

(B16) Antimonotonicidade:
Se $A \subseteq B$, então $B^\complement \subseteq A^\complement$.

4.7.4 Propriedades básicas da igualdade

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

(I1) Reflexividade:
$A = A$.

(I2) Simetria:
Se $A = B$, então $B = A$.

(I3) Transitividade:
Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

(I4) Substitutividade:

Se $A = B$, então se substituímos qualquer ocorrência de A por uma ocorrência de B em uma expressão C, obtendo uma expressão que denotamos por $C[A \leftarrow B]$, temos que $C[A \leftarrow B] \subseteq C$.

4.7.5 Propriedades básicas da inclusão

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

(C1) Reflexividade:

$A \subseteq A$.

(C2) Antissimetria:

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

(C3) Transitividade:

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Exercício 8 *Apresente uma prova algébrica das seguintes igualdades:*

(a) $(A \cup B) \cap B^{\complement} = A \cap B^{\complement}$

(b) $\left(A \cap B^{\complement}\right)^{\complement} \cup (B \cap C) = A^{\complement} \cup B$

Nesse exercício, em cada item, use apenas as igualdades e inclusões intuitivamente verdadeiras para todos os conjuntos e as propriedades da igualdade e da inclusão apresentadas nas listas anteriores.

4.7.6 Redação de provas algébricas

Redação de provas algébricas de igualdades. Dados os conjuntos A e B, tais que $A = B$, uma prova *algébrica* da igualdade segue o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\underline{\text{Prova (algébrica):}}}$ ao iniciar a prova.

2. Escreva

$$\boxed{\begin{array}{rclc} A & = & C_1 & \text{(justificativa 1)} \\ & = & C_2 & \text{(justificativa 2)} \\ & = & C_3 & \text{(justificativa 3)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & = & C_n & \text{(justificativa } n\text{)} \\ & = & B & \text{(justificativa } n+1\text{)} \quad \blacksquare \end{array}}$$

onde "(justificativa i)" é uma indicação de quais propriedades básicas ou hipóteses do problema justificam a igualdade na linha i.

Redação de provas algébricas de inclusões. Dados os conjuntos A e B, tais que $A \subseteq B$, uma prova *algébrica* da inclusão segue o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\underline{\text{Prova (algébrica):}}}$ ao iniciar a prova.

2. Escreva

$$\boxed{\begin{array}{rcll} A & \subseteq & C_1 & \text{(justificativa 1)} \\ & \subseteq & C_2 & \text{(justificativa 2)} \\ & \subseteq & C_3 & \text{(justificativa 3)} \\ & \vdots & \vdots & \qquad\vdots \\ & \subseteq & C_n & \text{(justificativa } n\text{)} \\ & \subseteq & B & \text{(justificativa } n+1\text{)} \quad \blacksquare \end{array}}$$

onde "(justificativa i)" é uma indicação de quais propriedades básicas ou hipóteses do problema justificam a inclusão na linha i.

4.7.7 Exemplos

Exemplo 1. Para todo conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.

<u>Prova (algébrica):</u>

$$\begin{array}{rcll} \emptyset & = & A \cap \emptyset & \text{(Zero } \cap\text{)} \\ & \subseteq & A & \text{(B13)} \quad \blacksquare \end{array}$$

Exemplo 2. Para todos os conjuntos A e B, temos que $(A \cup B) \cap B^{\complement} = A \cap B^{\complement}$.

<u>Prova (algébrica):</u>

$$\begin{array}{rcll} (A \cup B) \cap B^{\complement} & = & B^{\complement} \cap (A \cup B) & \text{(Comutatividade } \cap\text{)} \\ & = & (B^{\complement} \cap A) \cup (B^{\complement} \cap B) & \text{(Comutatividade } \cap\text{)} \\ & = & (B^{\complement} \cap A) \cup (B \cap B^{\complement}) & \text{(Distribut. } \cap \text{ sobre } \cup\text{)} \\ & = & (B^{\complement} \cap A) \cup \emptyset & \text{(Definição } \emptyset\text{)} \\ & = & B^{\complement} \cap A & \text{(Neutro } \cap\text{)} \\ & = & A \cap B^{\complement} & \text{(Comutatividade } \cap\text{)} \quad \blacksquare \end{array}$$

Exemplo 3. Para todos os conjuntos A e B, temos que $A \subseteq B$ se, e só se, $A \cap B = A$.

<u>Prova (algébrica):</u>

$$\begin{array}{llrcll} (\Rightarrow) & (\supseteq) & A & \subseteq & A \cap A & \text{(B3)} \\ & & & \subseteq & A \cap B & \text{(Suposição, B15)} \\ \\ & (\subseteq) & A \cap B & \subseteq & A & \text{(B13)} \\ \\ (\Leftarrow) & & A & = & A \cap B & \text{(Suposição)} \\ & & & = & B \cap A & \text{(Comut. } \cap\text{)} \\ & & & \subseteq & B & \text{(B13)} \quad \blacksquare \end{array}$$

Exercício 9 *Escreva sua resolução do Problema 1 e do Problema 2 usando o modelo de redação de provas algébricas apresentado na Seção 4.7.6.*

4.8 Exercício resolvido

Prove que:

Para todos os conjuntos A e B, temos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.

- RESOLUÇÃO - Prova: Sejam A e B conjuntos.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$.

($\subseteq$) Seja $x \in A \cap B$.
Daí, $x \in A$ e $x \in B$.
Daí, $x \in A$.
Logo, para todo x, se $x \in A \cap B$, então $x \in A$. Ou seja, $A \cap B \subseteq A$.

($\supseteq$) Seja $x \in A$.
Daí, como $A \subseteq B$, temos que $x \in B$.
Logo, $x \in A$ e $x \in B$.
Logo, $x \in A \cap B$.
Logo, para todo x, se $x \in A$, então $x \in A \cap B$. Ou seja, $A \subseteq A \cap B$.

Assim, como $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap B$, temos que $A \cap B = A$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $A \cap B = A$.
Seja $x \in A$.
Daí, como $A = A \cap B$, temos que $x \in A \cap B$.
Logo, $x \in A$ e $x \in B$.
Logo, $x \in B$.
Logo, para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$. Ou seja, $A \subseteq B$. ∎

4.9 Exercícios de fixação e revisão

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{\{1\}, \{2\}\}$ e $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, determine:
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A \cap C$
   (d) $B \cup C$
   (e) $C \cap D$
   (f) $C \cup D$
   (g) $(B \cap D) \cup A$
   (h) $(A \cap B) \cup D$
   (i) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

2. Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{5, 7, 9\} \quad \text{e} \quad C = \{1, 3, 9\},$$

determine o conjunto X tal que

$$A \cup X = A, \qquad B \cup X = B \quad \text{e} \quad C \cup X = A \cup B.$$

3. Determine conjuntos A, B e C que satisfaçam simultaneamente as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
&A \cup B \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x, z\}\\
&A \cap B = \{r, s\}\\
&B \cap C = \{s, x\}\\
&A \cap C = \{s, t\}\\
&A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}\\
&A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}
\end{aligned}$$

4. Dados o universo $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e os conjuntos $A = \{1, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 8\}$, $C = \{1, 5, 8, 9\}$ e $D = \{1, 7, 9\}$, determine:

$$(B^{\complement} \cap D) \cup C^{\complement}, \qquad (D \cap A) \cup B^{\complement} \quad \text{e} \quad (C \cap D^{\complement})^{\complement} \cup B.$$

5. Seja K o conjunto dos quadriláteros planos. Considere os seguintes conjuntos:

$$P = \{x \in K : x \text{ tem lados dois a dois paralelos}\}$$

$$L = \{x \in K : x \text{ tem quatro lados congruentes}\}$$

$$Q = \{x \in K : x \text{ tem quatro ângulos retos}\}$$

$$R = \{x \in K : x \text{ tem dois lados paralelos e dois ângulos retos}\}$$

Determine:

(a) $L \cap P$
(b) $R \cap P$
(c) $L \cap R$
(d) $Q \cap R$
(e) $L \cap Q$
(f) $P \cup Q$

6. Prove que:

(a) Para todos os conjuntos A, B e C, temos que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ se, e somente se, $A \subseteq B \cap C$.
(b) Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$.

*** Provas algébricas**

1. Apresente provas algébricas de que, para todos os conjuntos A, B e C, temos:
   (a) $B \subseteq A \cup B$.
   (b) $\emptyset \subseteq A \cup B$.
   (c) $A \cap B \subseteq B$.
   (d) $A \cap B \subseteq A \cup B$.
   (e) $(A \cup B)^{\complement} \subseteq A^{\complement} \cup B^{\complement}$.
   (f) $A \cap (B \cup C)^{\complement} = (A \cap B^{\complement}) \cap (A \cap C^{\complement})$.
   (g) $(A \cup B) \cap B^{\complement} = A \cap B^{\complement}$.
   (h) $(A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup (B \cap C) = A^{\complement} \cup B$.
   (i) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.
   (j) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cup B = B$.
2. Refaça os outros exercícios desse capítulo e os exemplos utilizando provas algébricas, quando for adequado.

Capítulo 5

Prova por Casos e Redução ao Absurdo

Neste capítulo, vamos falar sobre dois métodos de prova: o Método de Prova por Casos e o Método de Redução ao Absurdo.

5.1 Prova por casos

O Método de Prova por Casos pode ser usado para provar inclusões da forma $A \cup B \subseteq C$ e para desenvolver uma prova onde uma das informações dadas é da forma P ou Q.

Enunciados da forma P ou Q, onde P e Q são enunciados dados, são chamados de *disjunções*.

Provando inclusões $A \cup B \subseteq C$

Vamos começar por um exemplo. Dados os conjuntos

$$\begin{aligned} &A = \{x \in \mathbb{N} : \text{o último algarismo de } x \text{ é } 0\}, \\ &B = \{x \in \mathbb{N} : \text{o último algarismo de } x \text{ é } 5\} \text{ e} \\ &C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 5\} \end{aligned}$$

temos que $A \cup B \subseteq C$. Como podemos justificar essa inclusão?

Vejamos: sejam A, B e C conjuntos definidos por propriedades. Para justificar que $A \cup B \subseteq C$, *basta* fazer o seguinte:

1. Pegar um elemento genérico em $A \cup B$, ou seja, pegar um objeto que satisfaz a propriedade que define A **ou** que satisfaz a propriedade que define B;

2. Supor que ele satisfaz *apenas* a propriedade que define A e explicar por que, neste caso, ele satisfaz a propriedade que define C.

3. Supor que ele satisfaz *apenas* a propriedade que define B e explicar por que, neste caso, ele satisfaz a propriedade que define C.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que $A \cup B$ está, de fato, contido em C.

Dados os conjuntos A, B e C, tais que $A \cup B \subseteq C$, a prova da inclusão deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\underline{\text{Prova}}\text{:}}$ ao iniciar a prova.
2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \in A \cup B.}$ ou qualquer frase que contenha a mesma informação.
3. Escreva $\boxed{\text{Caso 1) } x \in A.}$ ou qualquer frase que contenha a mesma informação.
4. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que, no caso em que $x \in A$, temos também que $x \in C$.
5. Escreva $\boxed{\text{Caso 2) } x \in B.}$ ou qualquer frase que contenha a mesma informação.
6. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que, no caso em que $x \in B$, temos também que $x \in C$.
7. Escreva $\boxed{\text{Em qualquer caso, } x \in C.}$ ou qualquer frase que contenha a mesma informação.
8. Escreva ■ para terminar a prova.

Exercício 10 *1. Prove que, para todos os conjuntos A, B e C, temos que*

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Prove que, para todos os conjuntos A, B e C, temos que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

3. Prove que, para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x|y$ ou $x|z$, então $x|yz$.

5.2 Redução ao absurdo

O Método de Redução ao Absurdo pode ser usado para provar inclusões da forma $A \subseteq B^{\complement}$ e para desenvolver uma prova onde um dos enunciados a ser justificado é da forma não P.

Enunciados da forma não P, onde P é um enunciado dado, são chamados de *negações*.

Provando inclusões $A \subseteq B^{\complement}$

Quando queremos provar uma negação, o que queremos é provar que alguma coisa *não* acontece. E isso não é muito fácil. Vamos observar essa dificuldade (de provar negações) em um exemplo. Imagine que queremos provar que, para todos os conjuntos A e B em um universo $\mathcal{U}$, temos que, se $A \subseteq B$, então $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$. Trata-se de uma generalização de implicação, então, seguindo o que discutimos no Capítulo 2, nossa primeira ideia seria estruturar a prova assim:

<u>Prova</u>: Sejam $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Suponhamos que $A \subseteq B$. ⋮ Logo, $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$. ■

Na última linha desse esboço de prova vemos que a conclusão que devemos obter é uma inclusão. Para provar essa inclusão, novamente seguindo o que discutimos no Capítulo 2, nossa primeira ideia seria continuar o esboço da estrutura da prova assim:

<u>Prova</u>: Sejam $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Suponhamos que $A \subseteq B$. Seja $x \in \mathcal{U}$. Suponhamos que $x \in B^{\complement}$. $\vdots$ Logo, $x \in A^{\complement}$. Logo, $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$. ■

Continuando a olhar para onde queremos chegar, lembramos que $x \in A^{\complement}$ se, e somente se, $x \notin A$. Essa seria, então, a penúltima linha do nosso esboço, que ficaria assim:

<u>Prova</u>: Sejam $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Suponhamos que $A \subseteq B$. Seja $x \in \mathcal{U}$. Suponhamos que $x \in B^{\complement}$. $\vdots$ Logo, $x \notin A$. Logo, $x \in A^{\complement}$. Logo, $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$. ■

Agora deve estar evidente qual é a dificuldade: para completar esse esboço, devemos conseguir garantir que x **não** pertence a A. Não é fácil encontrar estratégias diretas para obter uma informação negativa.

O Método de Prova por Redução ao Absurdo é o ideal nessas situações. Essa é a ideia do método: dados A e B conjuntos definidos por propriedades, para justificar que $A \subseteq B^{\complement}$, *basta* fazer o seguinte:

1. Pegar um elemento genérico em A, ou seja, pegar um objeto que satisfaz a propriedade que define A.

2. Supor que ele *satisfaz* a propriedade que define B.

3. Explicar por que esta suposição leva a conclusões contraditórias.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que A está, de fato, contido em $B^{\complement}$.

Dados os conjuntos A e B, tais que $A \subseteq B^{\complement}$, a prova da inclusão deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\underline{\text{Prova}}\text{:}}$ ao iniciar a prova.

2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \in A.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

3. Escreva $\boxed{\text{Suponhamos, para uma contradição, que } x \in B.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

4. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que esta suposição nos permite tirar conclusões contraditórias.

5. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \notin B.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

6. Escreva ■ para terminar a prova.

Provando igualdades $A = \emptyset$

Outra situação onde aparece uma conclusão no formato de uma negação é quando queremos provar que determinado conjunto é o conjunto vazio. Por exemplo, imagine que queremos provar que, para todo $A \subseteq \mathcal{U}$, temos que $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. O conjunto vazio é o conjunto que **não** tem elementos. Para mostrar que um conjunto é vazio, devemos mostrar que ele **não** tem elementos. Novamente, temos uma conclusão negativa. Uma boa ideia, nesse caso, é usar o Método de Prova por Redução ao Absurdo, como segue.

Dado $A \subseteq \mathcal{U}$ um conjunto definido por propriedade, para justificar que $A = \emptyset$, *basta* fazer o seguinte:

1. Pegar um objeto genérico em $\mathcal{U}$.

2. Supor que ele *satisfaz* a propriedade que define A.

3. Explicar por que esta suposição leva a conclusões contraditórias.

Se você fizer isso corretamente, *todas* as pessoas, no contexto da Matemática, vão considerar que , de fato, $A = \emptyset$.

Dado um conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$ tal que $A = \emptyset$, a prova da igualdade deve seguir o seguinte modelo de redação:

1. Escreva $\boxed{\underline{\text{Prova}}\text{:}}$ ao iniciar a prova.

2. Escreva $\boxed{\text{Seja } x \in \mathcal{U}.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

3. Escreva $\boxed{\text{Suponhamos, para uma contradição, que } x \in A.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

4. Explique, tão detalhadamente quanto você achar necessário, por que esta suposição nos permite tirar conclusões contraditórias.

5. Escreva $\boxed{\text{Logo, } x \notin A.}$ ou qualquer outra frase que contenha a mesma informação.

6. Escreva ■ para terminar a prova.

Exercício 11 *1. Prove que, para todo $A \subseteq \mathcal{U}$, temos que $\emptyset \subseteq A$.*

2. Prove que, para todo $A \subseteq \mathcal{U}$, temos que $\mathcal{U} \subseteq A \cup A^{\complement}$.

5.3 Exercício resolvido

Mostre que:

Para todos os conjuntos A e B, temos que $A^{\complement} \cup B^{\complement} \subseteq A \cap B^{\complement}$.

- RESOLUÇÃO - Prova: Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$.
Seja $x \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

(CASO 1) $x \in A^{\complement}$.
Suponhamos, para uma contradição, que $x \in A \cap B$.
Daí, temos que $x \in A$ e $x \in B$.
Como $x \in A^{\complement}$, temos que $x \notin A$.
Temos uma contradição: $x \in A$ e $x \notin A$.
Logo, $x \notin A \cap B$.
Logo, $x \in A \cap B^{\complement}$.

(CASO 2) $x \in B^{\complement}$.
Suponhamos, para uma contradição, que $x \in A \cap B$.
Daí, temos que $x \in A$ e $x \in B$.
Como $x \in B^{\complement}$, temos que $x \notin B$.
Temos uma contradição: $x \in B$ e $x \notin B$.
Logo, $x \notin A \cap B$.
Logo, $x \in A \cap B^{\complement}$.

Em qualquer caso, $x \in A \cap B^{\complement}$.
Logo, $A^{\complement} \cup B^{\complement} \subseteq A \cap B^{\complement}$. ■

5.4 Exercícios de fixação e revisão

1. Prove que:
   (a) $A \cup B \subseteq C$, onde $A = \{x \in \mathbb{N} : \text{o último algarismo de } x \text{ é } 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{o último algarismo de } x \text{ é } 5\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 5\}$.
   (b) Para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x|y$ ou $x|z$, então $x|yz$.
   (c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $|a| = |-a|$.
   (d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $|ab| = |a| \cdot |b|$.
   (e) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $|a + b| \leq |a| + |b|$. *Desafio!*

2. Verdadeiro ou falso? Justifique. Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:
   (a) $A \cup B \subseteq A$.
   (b) $A \subseteq A \cap B$.
   (c) $A \cup (A \cap B) = A$.
   (d) $A \cap (A \cup B) = A$.
   (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (g) se $A \subseteq B$, então $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$.
   (h) $A \cap A^{\complement} = \emptyset$.

3. Considere a seguinte definição:

   Definição *Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$. A diferença entre A e B é o conjunto $A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.*

   Verdadeiro ou falso? Justifique. Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

   (a) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$.
   (b) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.
   (c) $A \setminus B = B \setminus A$.
   (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
   (e) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
   (f) $\mathcal{U} \setminus A = A^{\complement}$.
   (g) $A \setminus \emptyset = A$.
   (h) $A \setminus A = \emptyset$.

* Provas algébricas e provas com diagramas numerados

1. Considere a seguinte propriedade básica da operação de diferença:

   $$\text{Para todos os conjuntos } A \text{ e } B, \text{ temos que } A \setminus B = A \cap B^{\complement}. \qquad (\text{Def } \setminus)$$

   Apresente provas algébricas de que, para todos os conjuntos A, B e C, temos:

   (a) $A \setminus B \subseteq A$.
   (b) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

2. Refaça os outros exercícios desse capítulo e os exemplos utilizando provas algébricas e provas por diagramas numerados, quando for adequado.

3. Usando diagramas numerados, mostre que:

   (a) Para todos os conjuntos A e B, temos que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
   (b) Para todos os conjuntos A e B, temos que $A \setminus B = B \setminus A$ se, e somente se, $A = B$.

4. *(Desafio)* Apresente uma prova discursiva dos enunciados no item 3.

5. *(Desafio)* Apresente uma prova algébrica dos enunciados no item 3.

Capítulo 6

Conjunto das Partes e Antinomia de Russell

Neste capítulo, falamos sobre a operação de tomar o conjunto das partes de um conjunto e sobre a Antinomia de Russell.

6.1 Conjunto das partes

Definição 6.1 *Seja A um conjunto em um universo $\mathcal{U}$. O conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto cujos elementos são os objetos do universo que são subconjuntos de A:*

$$\mathcal{P}(A) = \{x \in \mathcal{U} : x \subseteq A\}.$$

Exemplo 6.1 *Dado o conjunto $V = \{\mathsf{a}, \mathsf{e}, \mathsf{i}, \mathsf{o}, \mathsf{u}\}$ das vogais, o conjunto das partes de V pode ser calculado, de maneira organizada, considerando a quantidade de elementos nos subconjuntos de V:*

(0) subconjuntos de V sem elementos: $\emptyset$;

(1) subconjuntos de V com 1 elemento (unitários): $\{\mathsf{a}\}$, $\{\mathsf{e}\}$, $\{\mathsf{i}\}$, $\{\mathsf{o}\}$, e $\{\mathsf{u}\}$;

(2) subconjuntos de V com 2 elementos: $\{\mathsf{a},\mathsf{e}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{i}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{i}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{i},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{i},\mathsf{u}\}$, e $\{\mathsf{o},\mathsf{u}\}$;

(3) subconjuntos de V com 3 elementos: $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{e},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$, e $\{\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$;

(4) subconjuntos de V com 4 elementos: $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$, e $\{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$;

(5) subconjuntos de V com 5 elementos: $\{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\}$.

Como V tem apenas 5 elementos, não existem subconjuntos de V com mais de 5 elementos. Juntando todos os subconjuntos de V em um conjunto, temos o conjunto das partes de V:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(V) = \{ \; & \emptyset,\ \{\mathsf{a}\},\ \{\mathsf{e}\},\ \{\mathsf{i}\},\ \{\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{i}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{o}\},\\ & \{\mathsf{a},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{i}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{i},\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{i},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{o},\mathsf{u}\},\\ & \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\\ & \{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o}\},\\ & \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\},\ \{\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{i},\mathsf{o},\mathsf{u}\} \; \}\end{aligned}$$

Exercício 12 *1. Calcule o conjunto das partes dos seguintes conjuntos:*

(a) $A = \{1\}$
(b) $B = \{1, 2\}$
(c) $C = \{1, 2, 3\}$
(d) $D = \{1, 2, 3, 4\}$
(e) $E = \emptyset$

2. Se F é um conjunto com n elementos, quantos elementos tem $\mathcal{P}(F)$?

3. Considere $A = \{1, \{1, 2\}, \emptyset\}$.

(a) Quantos elementos tem A?
(b) Quantos elementos tem $\mathcal{P}(A)$?
(c) Calcule $\mathcal{P}(A)$.

Propriedades básicas de $\mathcal{P}(A)$

Para todos os conjuntos A, B, C em um universo $\mathcal{U}$:

(1) $A \in \mathcal{P}(A)$

(2) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

(3) $\mathcal{P}(A \cap B)$???

(4) $\mathcal{P}(A \cup B)$???

(5) $\mathcal{P}(A^{\complement})$???

Exercício 13 – Desafio – *Encontre propriedades verdadeiras para todos os conjuntos A e B para os itens marcados com* ???.

Exercício 14 *Considere o universo $\mathcal{U} = \{i, o\}$.*

1. Quantos elementos tem $\mathcal{U}$?

2. Quantos elementos tem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$?

3. $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$?

4. Encontre um conjunto universo $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$.

6.2 Antinomia de Russell

Por que é preciso considerar um universo de discurso? Por que não podemos definir conjuntos por propriedade simplesmente considerando como definidos os conjuntos formados pelos objetos que satisfazem uma determinada propriedade? Ou seja, por que não podemos usar o Princípio da Abstração?

Princípio da Abstração (Cantor, Frege)
Dada uma propriedade P, existe o conjunto $A = \{x : P(x)\}$.

A razão para enfrentarmos os universos complicados que surgem ao trabalharmos, por exemplo, com a operação de tomar o conjunto das partes é que Bertrand Russell (1872–1970), matemático britânico, mostrou que o Princípio da Abstração é *falso*.

O Princípio da Abstração é uma generalização de implicação: "para todo P, se P e uma propriedade, então existe o conjunto $A = \{x : P(x)\}$". Para mostrar que o Princípio da Abstração é falso, basta encontrar uma propriedade P tal que o conjunto $A = \{x : P(x)\}$ não existe. Russell propôs a propriedade de ser um conjunto *normal*.

Definição 6.2 *Seja A um conjunto. Dizemos que A é normal se $A \notin A$. Dizemos que A é anormal se A não é normal, isto é, se $A \in A$.*

São conjuntos normais:

(a) O conjunto dos números naturais.

(b) O conjunto dos alunos desta turma.

(c) O conjunto dos exercícios da Lista 6.

(d) O conjunto dos livros indicados para estudo nesta disciplina.

São conjuntos anormais:

(a) O conjunto de todos os conjuntos.

(b) O conjunto de tudo o que você pode pensar.

(c) O conjunto de todos os conjuntos infinitos.

(d) O conjunto de todos os objetos abstratos.

Vamos examinar o argumento de Russell. Ele usa o Método de Redução ao Absurdo: supõe que existe o conjunto definido usando-se a propriedade de ser normal, e chega a uma contradição.

Considere o conjunto $N = \{x : x \text{ é um conjunto normal}\}$, isto é, $N = \{x : x \notin x\}$. Temos que N é normal **ou** anormal.

(CASO 1) Se N fosse normal, teríamos que $N \notin N$, pela definição de conjuntos normais. Daí, como $N = \{x : x \notin x\}$, teríamos que $N \in N$, uma contradição.

(CASO 2) Se N fosse anormal, teríamos que $N \in N$, pela definição de conjuntos normais. Daí, como $N = \{x : x \notin x\}$, teríamos que $N \notin N$, uma contradição.

Em qualquer caso, temos uma contradição. Logo, N não é um conjunto, ou seja, a propriedade de ser um conjunto normal ($x \notin x$) não define um conjunto. Portanto, o Princípio da Abstração é falso.

Princípio da Separação

No desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, o Princípio da Abstração foi substituído pelo *Princípio da Separação*.

Princípio da Separação (Cantor, Frege)
Dados um conjunto universo $\mathcal{U}$ e uma propriedade P, existe o conjunto $A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$.

6.3 Exercício resolvido

Verdadeiro ou falso?

1. Para todos os conjuntos A e B, temos que $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
2. Para todos os conjuntos A e B, temos que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

- RESOLUÇÃO -

1. *Resposta:* Falso.
   Justificativa: Considere o conjunto $A = \{a\}$ e o conjunto $B = \{1\}$.
   Temos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ e que $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
   Daí, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{1\}\}$.
   Temos também que $A \cup B = \{a, 1\}$ e $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{1\}, \{a, 1\}\}$.
   Como $\{a, 1\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ e $\{a, 1\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, temos que $\mathcal{P}(A \cup B) \nsubseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
2. *Resposta:* Verdadeiro.
   <u>Prova:</u>
   Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$.
   Seja $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

   (CASO 1) $X \in \mathcal{P}(A)$.
   Seja $x \in X$.
   Como $X \in \mathcal{P}(A)$, temos que $X \subseteq A$.
   Daí, como $x \in X$, temos que $x \in A$.
   Daí, como $A \subseteq A \cup B$, temos que $x \in A \cup B$.
   Logo, $X \subseteq A \cup B$.
   Logo, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

   (CASO 2) $X \in \mathcal{P}(B)$.
   Seja $x \in X$.
   Como $X \in \mathcal{P}(B)$, temos que $X \subseteq B$.
   Daí, como $x \in X$, temos que $x \in B$.
   Daí, como $B \subseteq A \cup B$, temos que $x \in A \cup B$.
   Logo, $X \subseteq A \cup B$.
   Logo, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

   Em qualquer caso, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. ■

6.4 Exercícios de fixação e revisão

1. Determine o conjunto das partes de cada conjunto a seguir:

$$A = \{a, b\}, \qquad B = \{3\}, \qquad C = \{\{x\}, y, z\}, \qquad D = \emptyset \qquad \text{e} \qquad E = \{\emptyset\}.$$

2. Verdadeiro ou falso, justifique. Para $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1\}\}$, temos:
   (a) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$.
   (b) $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$.
   (c) $\{1, \{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.
   (d) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(A)$.
   (e) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.
   (f) $\{\{\emptyset, 1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.
   (g) $\{\emptyset, \{1\}, 2\} \in \mathcal{P}(A)$.
   (h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(A)$.
   (i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

3. Dado o conjunto $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, determine $E \cap \mathcal{P}(E)$.

4. Prove que, para todos os conjuntos A, B e C, temos:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
   (b) $A \in \mathcal{P}(A)$.
   (c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

5. Mostre que **não** é verdade que, para todos os conjuntos A e B, temos que $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Capítulo 7

Relações

Neste capítulo, começamos a falar sobre relações. Vamos definir pares ordenados como conjuntos e definir relações como conjuntos de pares ordenados.

7.1 Par ordenado

Todo objeto matemático pode ser considerado um conjunto e, de fato, isto é feito de maneira precisa na fundamentação da Matemática baseada em Teoria de Conjuntos. Mas muitos objetos matemáticos não se parecem com conjuntos! Sequências finitas (pares, ternos, quádruplas, etc), por exemplo:

$$(a,a) \neq (a,a,a) \neq (a) \quad \text{mas} \quad \{a,a,a\} = \{a,a\} = \{a\}$$

$$\underset{\text{se } a \neq b}{(a,b) \neq (b,a)} \quad \text{mas} \quad \underset{\text{se } a \neq b}{\{a,b\} = \{b,a\}}$$

Definição 7.1 *(Kuratowski, 1921 - Wiener, 1914) Sejam a e b objetos em um universo $\mathcal{U}$. Dizemos que o par ordenado ab é o conjunto $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, que a é a primeira coordenada do par (a,b), e que b é segunda coordenada do par (a,b).*

Com essa definição de par ordenado como um conjunto, podemos provar que os pares ordenados possuem a principal propriedade que distingue conjuntos com dois elementos e pares ordenados: dois pares são iguais quando suas primeiras coordenadas são iguais e suas segundas coordenadas são iguais. (Lembre que dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos, não importando a ordem em que esses elementos aparecem na lista que define o conjunto, se o conjunto for definido por listagem.)

Teorema 7.1 *Para todos $a,b,c,d \in \mathcal{U}$, temos que*

$$(a,b) = (c,d) \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Exercício 15 – Desafio (de paciência) – *Prove o Teorema 7.1.*
(Lembre que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ se, e somente se, $\{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq \{\{c\},\{c,d\}\}$ e $\{\{c\},\{c,d\}\} \subseteq \{\{a\},\{a,b\}\}$, e que, se $\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$, então $\{a\} = \{c\}$ ou $\{a\} = \{c,d\}$.)

7.2 Produto cartesiano

Definição 7.2 *Sejam A e B conjuntos em um universo $\mathcal{U}$. O produto cartesiano de A e B é o conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{U} \ : \ a \in A \ \text{e} \ b \in B\}.$$

Exemplo 7.1 *Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, temos que*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}, \\ A \times A &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}, \ \text{e} \\ B \times B &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}. \end{aligned}$$

Considerando a definição de par ordenado como um conjunto, temos, por exemplo, que $(1, a) = \{\{1\}, \{1, a\}\}$ e, portanto, $\{\{1\}, \{1, a\}\} \in A \times B$.

Exercício 16 *Considere A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. Verdadeiro ou falso?*

(a) $(a, b) \in \mathcal{P}(A \cup B)$

(b) $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

(c) $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$

(d) $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))))$

(e) $A \times B \in \mathcal{P}(A \cup B)$

(f) $A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

(g) $A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$

(h) $A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))))$

Propriedades básicas de $\times$

Para todos os conjuntos A, B, C:

(1) Associatividade ???

(2) Comutatividade ???

(3) $A \times \emptyset = \emptyset$

(4) Distributividade sobre $\cap$???

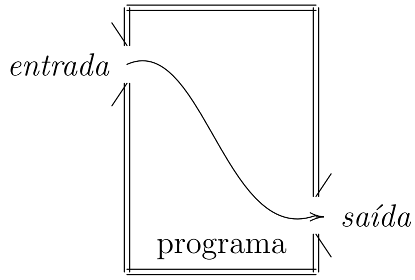
(5) Distributividade sobre $\cup$???

(6) $(A \times B)^{\complement}$???

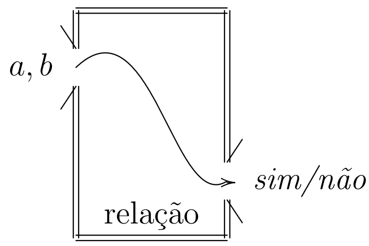
Exercício 17 – Desafio – *Encontre propriedades verdadeiras para todos os conjuntos A e B para alguns dos itens marcados com ???.*

7.3 Relações

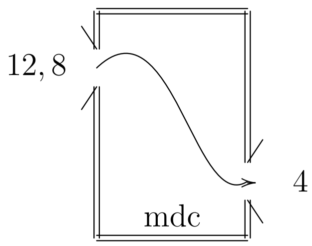
Um *programa de computador* pode ser visto como um conjunto de pares ordenados, as *entradas* e *saídas* do programa.

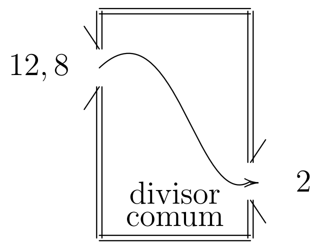


Vamos definir uma relação como um conjunto de pares ordenados. Vários conceitos matemáticos importantes podem ser vistos como *relações*, como, por exemplo, as relações de igualdade ($=$), ordem numérica ($\leq$), pertinência ($\in$), inclusão ($\subseteq$).



Programas, determinísticos ou não-determinísticos, podem ser vistos como relações. Por exemplo, um programa que calcula o máximo divisor comum (mdc) entre dois números pode ser visto como uma relação que associa, a cada par de números, o seu mdc. Um programa (não determinístico) que calcula um divisor comum de dois números pode ser visto como uma relação que associa, a cada par de números, seus divisores comuns.





Definição 7.3 *Sejam A, B, e R conjuntos. Dizemos que R é uma* <u>*relação de A em B*</u> *quando $R \subseteq A \times B$.*

Com essa definição, relações são conjuntos de pares ordenados. Além disso, dados quaisquer conjuntos A e B, o conjunto $\emptyset$ é uma relação de A em B e o produto cartesiano $A \times B$ é uma relação de A em B.

É comum usar uma notação *infixa* para representar o fato de que dois objetos a e b estão relacionados por uma relação R, ou seja, para representar que $(a, b) \in R$. Na notação infixa, escrevemos aRb no lugar de $(a, b) \in R$.

Exemplo 7.2 *Vejamos dois exemplos simples de relação. Considere o conjunto* $V = \{\mathsf{a}, \mathsf{e}, \mathsf{i}, \mathsf{o}, \mathsf{u}\}$ *das vogais e* $F = \{\mathsf{banana}, \mathsf{abacaxi}, \mathsf{uva}\}$*, o conjunto formado por nomes de algumas frutas.*

1. *A relação R de V em F que a cada vogal associa nome de fruta no conjunto F que tem ocorrência da vogal pode ser definida por propriedade assim:*

$$R = \{(x, p) \in F \times A : x \text{ é uma vogal que ocorre em } p\}$$

e pode ser definida por listagem assim:

$$R = \{(\mathsf{a}, \mathsf{banana}), (\mathsf{a}, \mathsf{abacaxi}), (\mathsf{i}, \mathsf{abacaxi}), (\mathsf{a}, \mathsf{uva}), (\mathsf{u}, \mathsf{uva})\}.$$

Temos, por exemplo, que $\mathsf{a}\, R\, \mathsf{banana}$ *mas não temos* $\mathsf{e}\, R\, \mathsf{banana}$ *nem* $\mathsf{i}\, R\, \mathsf{uva}$.

2. *A relação S de F em F que associa nomes de fruta no conjunto F que possuem duas letras em comum pode ser definida por propriedade assim:*

$$S = \{(p, q) \in F \times F : p \text{ e } q \text{ possuem duas letras em comum}\}$$

e pode ser definida por listagem assim:

$$S = \{(\mathsf{banana}, \mathsf{banana}), (\mathsf{banana}, \mathsf{abacaxi}), (\mathsf{abacaxi}, \mathsf{abacaxi}), (\mathsf{abacaxi}, \mathsf{banana})\}.$$

Temos que $\mathsf{banana}\, S\, \mathsf{abacaxi}$*, pois a palavra* banana *e a palavra* abacaxi *possuem as letras* a *e* b *em comum. Como a palavra* banana *possui (pelo menos) duas letras em comum com ela mesma, também temos que* $\mathsf{banana}\, S\, \mathsf{banana}$.

Exemplos importantes de relações

(a) $=$ (igualdade)

(b) $\leq$, $<$, $\geq$ e $>$ (relações de ordem usuais nos conjuntos numéricos)

Em $\mathbb{N}$, as relações $\leq$ e $<$ são usualmente definidas a partir da operação de adição.

Definição 7.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a é menor ou igual a b, denotado por $a \leq b$, quando existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$.*

Definição 7.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a é estritamente menor do que b, denotado por $a < b$, quando, existe $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $a + c = b$.*

Em $\mathbb{R}$, a relação $\leq$ é usualmente definida a partir das operações de adição e de elevar ao quadrado.

Definição 7.6 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é menor ou igual a b, denotado por $a \leq b$, quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + c^2 = b$.*

Exercício 18 *Defina a relação $\leq$ em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Q}$.*

(c) Divisibilidade.

Em $\mathbb{N}$, a relação de divisibilidade $|$ é usualmente definida a partir da operação de multiplicação.

Definição 7.7 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a divide b, denotado por $a|b$, quando existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot c = b$.*

Exercício 19 *Defina a relação de divisibilidade $|$ em $\mathbb{Z}$.*

(d) Primos entre si.

Definição 7.8 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a e b são primos entre si quando para todo $c \in \mathbb{N}$, se $c|a$ e $c|b$, então $c = 1$.*

Definição 7.9 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a e b são primos entre si quando para todo $c \in \mathbb{Z}$, se $c|a$ e $c|b$, então $c = 1$ ou $c = -1$.*

(e) Congruência módulo n.

Definição 7.10 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a e b são congruentes módulo n, denotado por $a \equiv_n b$ quando a e b possuem mesmo resto na divisão por n.*

Notações alternativas para $a \equiv_n b$ são $a \equiv b \pmod{n}$ e $a = b \pmod{n}$.

7.4 Domínio e imagem

Definição 7.11 *Seja R uma relação de A em B. Dizemos que A é o conjunto de partida ou contraimagem de R e B é o conjunto de chegada ou contradomínio de R. O domínio de R, denotado por $\mathsf{Dom}R$, é o subconjunto de A definido por:*

$$\mathsf{Dom}R = \{a \in A : (a, b) \in R, \text{ para algum } b \in B\}.$$

A imagem de R, denotada por $\mathsf{Im}R$, é o subconjunto de B definido por:

$$\mathsf{Im}R = \{b \in B : (a, b) \in R, \text{ para algum } a \in A\}.$$

Exemplo 7.3 *Vejamos alguns exemplos:*

1. *Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e a relação $R = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$ de A em B, temos que o domínio de R é $\mathsf{Dom}R = \{1, 2\}$ e a imagem de R é $\mathsf{Im}R = \{a, b\}$.*
2. *O domínio da relação de 'ser avô-ou-avó de' é o conjunto de todas as pessoas que têm netos ou netas. A imagem da relação de 'ser avô-ou-avó de' é o conjunto de todas as pessoas que são netos ou netas de alguém. A contra-imagem e o contra-domínio da relação de 'ser avô-ou-avó de' pode ser o conjunto de todas as pessoas.*

Exercício 20 *Encontre o domínio e a imagem das cinco relações listadas na seção anterior como exemplos importantes de relação (itens (a), (b), (c), (d), e (e)).*

7.5 Operações sobre relações

Relações são conjuntos. Por isso, noções e operações usuais sobre conjuntos, como pertinência $\in$, inclusão $\subseteq$, igualdade $=$, união $\cup$, interseção $\cap$, e complementação $^{\complement}$, adequam-se às relações. (Apenas lembre-se de que, para a aplicação da operação de complementação, deve-se considerar um *universo adequado*.)

Os objetos que pertencem a uma relação são pares ordenados. Existem operações especiais que se aplicam a relações, que levam em conta que os elementos das relações são *pares ordenados.*

Definição 7.12 *Seja R uma relação de A em B. A inversa de R é a relação*

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \ : \ (a, b) \in R\}.$$

Ou seja, dados uma relação $R \subseteq A \times B$ e objetos $a \in A$ e $b \in B$, temos que $aR^{-1}b$ se, e somente se, bRa.

Vejamos alguns exemplos:

1. Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e a relação $R = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$ de A em B, temos que a inversa de R é $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}$.

2. A inversa da relação $\leq$ em $\mathbb{N}$ é a relação $\geq$. De fato, dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $m \leq n$ se, e somente se, $n \geq m$.

3. A inversa da relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é a relação de 'ser um múltiplo de'. De fato, dados $a, b \in \mathbb{N}$, temos que a divide b se, e somente se, b é um múltiplo de a.

4. A inversa da relação de 'ser avô-ou-avó de' é a relação de 'ser-neto-ou-neta de'. De fato, a é avô ou avó de b se, e somente se, b é neto ou neta de a.

Propriedades básicas da inversão de relações. Para todas as relações R e S de um conjunto A em um conjunto B, temos que:

(1) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

(2) $\left(R^{-1}\right)^{\complement} = \left(R^{\complement}\right)^{-1}$

(3) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

(4) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Definição 7.13 *Sejam $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$. A composição de R com S é a relação*

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times D : \ \textit{existe } y \in B \cap C \textit{ tal que } (x, y) \in R \textit{ e } (y, z) \in S\}.$$

Ou seja, dadas as relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$ e os objetos $a \in A$ e $d \in D$, temos que $a(R \circ S)d$ se, e somente se, aRb e bSd, para algum $b \in B \cap C$.

Exemplo 7.4 *Vejamos alguns exemplos:*

1. *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{a, e, i, o, u\}$ *e* $D = \{x, y, z\}$, *a relação* $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (3, c), (3, e)\}$ *de* A *em* B *e a relação* $S = \{(a, x), (a, y), (e, y), (i, z)\}$ *de* C *em* D, *a composição de* R *com* S *é*

$$R \circ S = \{(1, x), (1, y), (3, x), (3, y)\}.$$

2. *A composição da relação* $\leq$ *com ela mesma em* $\mathbb{N}$ *é própria relação* $\leq$ *em* $\mathbb{N}$. *De fato, dados* $a, b, c \in \mathbb{N}$, *se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$, *então* $a \leq c$; *e, se* $a \leq c$, *então existe* $b \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *(basta tomar* $b = a$, *por exemplo).*

3. *A composição da relação de 'ser pai-ou-mãe de' com a própria relação de 'ser pai-ou-mãe de' é a relação de 'ser-avô-ou-avó de'. De fato, dadas as pessoas* a, b, c, *se* a *é pai-ou-mãe de* b *e* b *é pai-ou-mãe de* c, *então* a *é avô-ou-avó de* c; *e, se* a *é avô-ou-avó de* c, *então existe uma pessoa* b *tal que* a *é pai-ou-mãe de* b *e* b *é pai-ou-mãe de* c.

Propriedades básicas da composição de relações. Para todas as relações R, de um conjunto A em um conjunto B, e S e T, de um conjunto C em um conjunto D, temos que:

(1) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

(2) $R \circ R$???

(3) $R \circ S$???

(4) $(R \circ S)^{\complement}$???

(5) $R \circ (S \cap T)$???

(6) $R \circ (S \cup T)$???

Exercício 21 – Desafio – *Encontre propriedades verdadeiras para todas as relações* R, S *e* T, *para alguns dos itens marcados com* ???.

Composição de funções e composição de relações

Ainda não falamos sobre funções, mas você deve ter estudado funções e composição de funções no Ensino Médio. Por isso, imagino alguns questionamentos que você poderia fazer: *a composição de funções e a composição de relações são operações diferentes? Mas funções são relações* (ainda vamos falar sobre isso)*... Como saber se estamos falando da composição de funções ou da composição de relações, se o símbolo é o mesmo?* Uma resposta é a seguinte:

O mais comum é usar letras maiúsculas do fim do alfabeto (R, S, T, ...) para denotar relações e letras minúsculas do meio do alfabeto (f, g, h, ...) para denotar funções (relações que são funcionais e totais, como ainda vamos ver). Quando estamos falando apenas de funções, a notação usual para a composição de uma função f com uma função g é $f \circ g$, mas nesse contexto a definição de composição é diferente.

Vejamos um exemplo. Dadas as relações $R = \{(a, |a|) : a \in \mathbb{Z}\}$ e $S = \{(a, -a) : a \in \mathbb{Z}\}$, temos que $R \circ S = \{(a, -a) : a \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}_-\}$. No entanto, se pensamos em R e S como funções e denotamos a relação R por f e a relação S por g, teríamos $f(x) = |x|$, $g(x) = -x$ e $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x) = |-x| = x$, ou seja, $f \circ g = \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$. Veja que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = -|x|$, ou seja, $g \circ f = R \circ S$.

Usamos o mesmo símbolo $\circ$, mas estamos falando de operações de composição diferentes! A notação (letras maiúsculas do fim do alfabeto, como R, S e T, para denotar relações, e letras miniúsculas do início do alfabeto, como f, g e h, para denotar funções) ajuda a fazer alguma distinção entre as operações, mas devemos sempre conferir qual é a definição que está sendo usada em um certo contexto.

7.6 Relações especiais

Dados A e B conjuntos, temos que $\emptyset$ é uma relação de A em B, chamada relação vazia de A em B, e $A \times B$ é uma relação de A em B, chamada relação universal de A em B.

Para todas as relações R, de um conjunto A em um conjunto B, e todo conjunto C, temos que:

(1) $\emptyset^{-1} = \emptyset$

(2) $(A \times B)^{-1} = B \times A$

(3) $\emptyset \circ R = \emptyset$

(4) $R \circ \emptyset = \emptyset$

(5) $R \circ (B \times C) = \mathsf{Dom} R \times C$

(6) $(C \times A) \circ R = C \times \mathsf{Im} R$

Outra relação especial é a relação identidade.

Definição 7.14 *Seja A um conjunto. A identidade em A é a relação* $\mathsf{Id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

A relação identidade em um conjunto A, então, é aquela que, informalmente, chamamos de “igualdade” e denotamos por $=$, restrita aos elementos de A.

Exemplo 7.5 *Dado $V = \{a, e, i, o, u\}$ o conjunto das vogais, temos que*

$$\mathsf{Id}_V = \{(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (u, u)\}.$$

Propriedades básicas da relação identidade. Para toda relação R de um conjunto A em um conjunto B:

(1) $R \circ \mathsf{Id}_B = R$

(2) $\mathsf{Id}_A \circ R = R$

(3) $(\mathsf{Id}_A)^{-1} = \mathsf{Id}_A$

(4) $\mathsf{Id}_\emptyset = \emptyset$

7.7 Endorrelações

É difícil encontrar propriedades interessantes das operações sobre relações, principalmente quando se trata da operação de composição. Uma razão para essa dificuldade é a falta de homogeneidade dos pares que compõem uma relação R de A em B quando $A \neq B$. Vamos, então, simplificar um pouco e considerar apenas relações de A em B onde $A = B$.

Definição 7.15 *Seja A um conjunto. Dizemos que R é uma endorrelação em A quando $R \subseteq A \times A$.*

Álgebra das endorrelações. Para todas as relações R, S e T em um conjunto A:

(1) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

(2) $R \circ \mathsf{Id}_A = \mathsf{Id}_A \circ R = R$

(3) $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$

(4) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

(5) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

(6) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

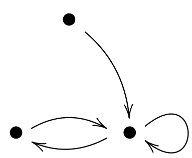
(7) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

(8) $\left(R^{-1}\right)^{\complement} = \left(R^{\complement}\right)^{-1}$

(9) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

7.8 Grafo de uma relação

Um *grafo (direcionado)* é uma estrutura matemática constituída de um conjunto finito de *nós* e um conjunto finito de *arestas (direcionadas)* ligando esses nós. Informalmente, representamos um grafo desenhando pontos para representar os nós e ligando esses pontos por traços para representar as arestas. Para representar um grafo direcionado, usamos setas no lugar de traços. No desenho a seguir vemos a representação de um grafo direcionado com três nós e quatro arestas direcionadas.



Definição 7.16 *Dada uma relação R em um conjunto* finito *A, o grafo de R é um grafo direcionado $G[R]$ cujos nós são os elementos de A e cujas setas são os pares em R.*

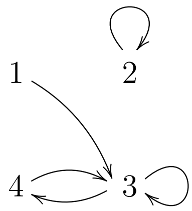
Para desenhar o grafo $G[R]$ da relação R sobre um conjunto finito A, fazemos o seguinte:

1. desenhamos um nó para cada elemento de A,

2. desenhamos uma aresta saindo de x e chegando em y para cada par (x, y) de R.

Vejamos um exemplo. Considere o conjunto finito $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$. Temos que o grafo de R é

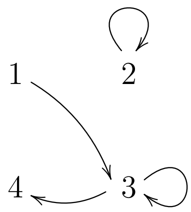
$G[R]$:



Podemos calcular a inversa de uma relação usando o grafo da relação. Para obter o grafo de R^{-1} basta inverter o sentido de todas as arestas do grafo da relação R.

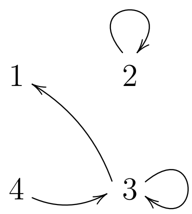
Vejamos um exemplo. Considere o conjunto finito $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ em A. O grafo de R é

$G[R]$:



Invertendo o sentindo de todas as arestas de G_R, obtemos o grafo de R^{-1}.

$G[R^{-1}]$:



Assim, a inversa de R é a relação $R^{-1} = \{(3, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 3)\}$.

Podemos também obter o grafo da composta de duas relações a partir dos grafos dessas relações. Para obter o grafo de $R \circ S$ a partir do grafo de R e do grafo de S:

1. desenhamos $G[R]$ e $G[S]$ superpostos, usando rótulos R e S para identificar as arestas de G_R e de G_S, respectivamente;

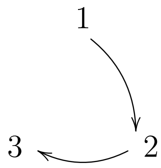
2. para cada par de arestas $x \xrightarrow{R} y$ e $y \xrightarrow{S} z$, desenhamos uma nova aresta $x \xrightarrow{R \circ S} z$;

3. apagamos todas as arestas que não estão marcadas com $R \circ S$;

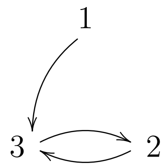
4. apagamos todos os rótulos das arestas restantes.

Vejamos um exemplo. Considere o conjunto finito $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ e $S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ em A. Os grafos de R e de S são dados a seguir.

$G[R]$:

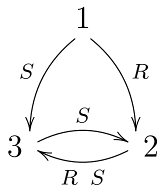


$G[S]$:

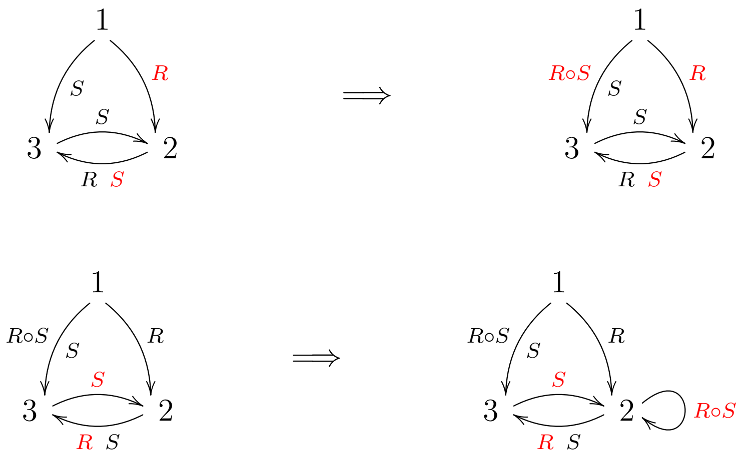


A composta de R com S pode ser obtida assim:

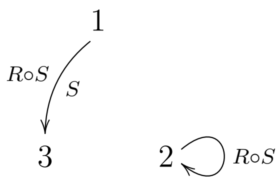
<u>*Passo 1*</u>



<u>*Passo 2*</u>

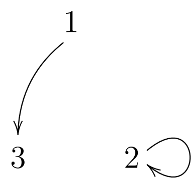


<u>*Passo 3*</u>



<u>*Passo 4*</u>

$G[R \circ S]$:

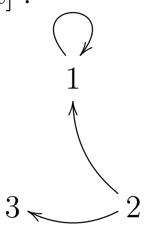


Assim, dadas as relações $R = \{(1,2),(2,3)\}$ e $S = \{(1,3),(2,3),(3,2)\}$, ambas sobre $A = \{1,2,3\}$, a composta de R com S é:

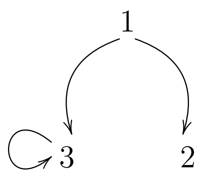
$$R \circ S = \{(1,3),(2,2)\}.$$

Vejamos mais um exemplo. Considere o conjunto finito $A = \{1,2,3\}$ e as relações $R = \{(1,1),(2,1),(2,3)\}$ e $S = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$ em A. Os grafos de R e de S são dados a seguir.

$G[R]$:

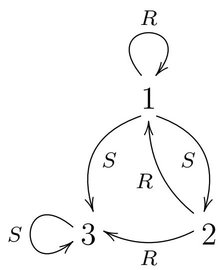


$G[S]$:

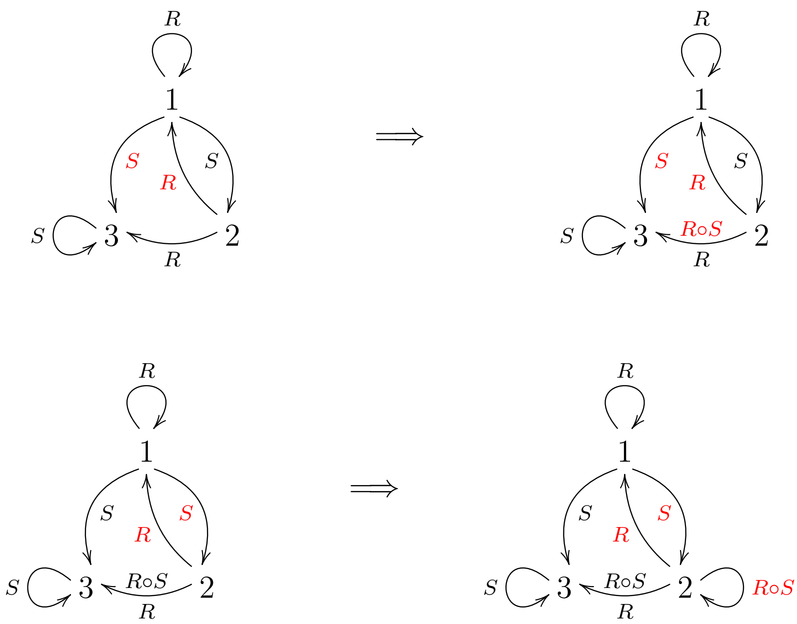


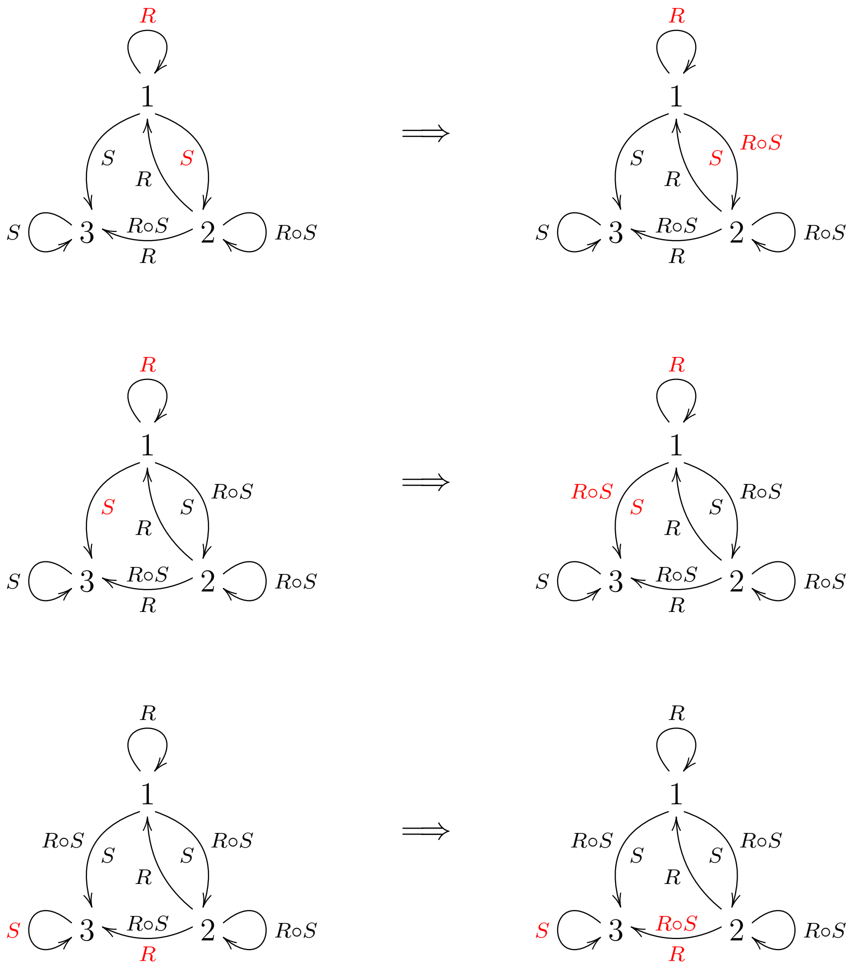
A composta de R com S pode ser obtida assim:

<u>*Passo 1*</u>

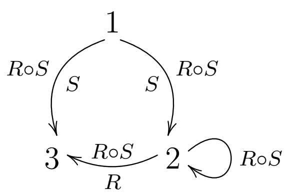


<u>*Passo 2*</u>



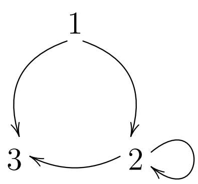


<u>*Passo 3*</u>



<u>*Passo 4*</u>

$G[R \circ S]$:



Assim, dadas $R = \{(1,1),(2,1),(2,3)\}$ e $S = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$ relações em $A = \{1,2,3\}$, a composta de R com S é:

$$R \circ S = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}.$$

7.9 Exercício resolvido

(I) Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

1. Calcule $A \times A$.
2. Calcule Id_A.
3. Calcule R^{-1}.
4. Calcule $R \circ S$.

(II) Verdadeiro ou falso?

1. Para todas as endorrelações R, S e T em um conjunto A, temos que

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T).$$

2. Para todas as endorrelações R, S e T em um conjunto A, temos que

$$(R \circ S) \cap (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cap T).$$

- RESOLUÇÃO -

(I)

1. Quando o conjunto A é apresentado por listagem, para calcular $A \times A$ podemos fazer o seguinte:

   (a) percorrer a lista de elementos do conjunto A e considerar um elemento x de cada vez,

   (b) fixado um elemento x, percorrer novamente a lista dos elementos de A e formar um par (x, y) para cada elemento de A (sem esquecer o próprio x: o par (x, x) também deve ser formado),

   (c) pegar o próximo elemento x na lista do conjunto A e repetir o passo 1b.

   Vamos, então, considerar o conjunto dado:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

   Podemos calcular $A \times A$ assim:

   - Pegamos o elemento em A: 1;
     - consideramos a lista de elementos de A e formamos um par para cada elemento a de A, colocando 1 na primeira coordenada e a na segunda coordenada;
     - e começamos a lista de elementos de $A \times A$ com os pares $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ e $(1, 4)$:

Lista (em construção) de elementos de $A \times A$:
$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)$

- Pegamos o segundo elemento em A: 2;
  - consideramos a lista de elementos de A e formamos um par para cada elemento a de A, colocando 2 na primeira coordenada e a na segunda coordenada;
  - acrescentamos os pares $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$ e $(2,4)$ na lista de elementos de $A \times A$:

    Lista (em construção) de elementos de $A \times A$:
    $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$
    $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)$
- Pegamos o terceiro elemento em A: 3;
  - consideramos a lista de elementos de A e formamos um par para cada elemento a de A, colocando 3 na primeira coordenada e a na segunda coordenada;
  - acrescentamos os pares $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$ e $(3,4)$ na lista de elementos de $A \times A$:

    Lista (em construção) de elementos de $A \times A$:
    $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$
    $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
    $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)$
- Pegamos o quarto elemento em A: 4;
  - consideramos a lista de elementos de A e formamos um par para cada elemento a de A, colocando 4 na primeira coordenada e a na segunda coordenada;
  - acrescentamos os pares $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$ e $(4,4)$ na lista de elementos de $A \times A$:

    Lista (em construção) de elementos de $A \times A$:
    $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$
    $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
    $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$
    $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$
- Como 4 era o último elemento em A, terminamos de escrever a lista de elementos de $A \times A$, que ficou assim:

  Lista (completa) de elementos de $A \times A$:
  $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$
  $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
  $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$
  $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$

Resposta: $A \times A = \{\ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),\ (2,4),(3,1),(3,2),$ $(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\ \}$.

2. Quando o conjunto A é apresentado por listagem, para calcular Id_A podemos simplesmente percorrer a lista que apresenta os elementos de A e formar um par (x,x) para cada elemento x.

   Resposta: $\mathsf{Id}_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

3. Quando a relação R é apresentada por listagem, para calcular R^{-1} podemos simplesmente percorrer a lista que apresenta os pares de R e formar um par (y, x) para cada par (x, y) de R.

   Resposta: $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3)\}$.

4. Quando as relações R e S são apresentadas por listagem, para calcular $R \circ S$ podemos fazer o seguinte:

   (a) percorrer a lista de elementos da relação R e considerar um par de cada vez,
   (b) pegar um par (x, y) na relação R,
   (c) procurar na relação S um par que tenha y na primeira coordenada,
   (d) para cada par (y, z) encontrado em S, escreva o par (x, z) na lista de elementos de $R \circ S$,
   (e) pegar o próximo par (x, y) na lista da relação R e repetir os passos 4c e 4d.

   Vamos, então, considerar as relações dadas:

   $$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\},$$

   $$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}.$$

   Podemos calcular $R \circ S$ assim:

   - Pegamos o primeiro par em R: $(1, 2)$;
     - procuramos em S os pares que têm 2 na primeira coordenada e encontramos apenas um par: $(2, 1)$;
     - montamos então o par $(1, 1)$, usando a primeira coordenada do par $(1, 2)$ de R e a segunda coordenada do par $(2, 1)$ de S;
     - e começamos a lista de elementos de $R \circ S$ com o par $(1, 1)$:

       Lista (em construção) de elementos de $R \circ S$:
       $(1, 1)$
   - Pegamos o segundo par em R: $(1, 3)$;
     - procuramos em S os pares que têm 3 na primeira coordenada e encontramos três pares: $(3, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$;
     - montamos então os pares $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(1, 4)$, usando a primeira coordenada do par $(1, 3)$ de R e a segunda coordenada de cada um dos pares $(3, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$ de S, e acrescentamos os pares $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(1, 4)$ na lista de elementos de $R \circ S$:

       Lista (em construção) de elementos de $R \circ S$:
       $(1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 4)$
   - Pegamos o terceiro par em R: $(2, 3)$;
     - procuramos em S os pares que têm 3 na primeira coordenada e encontramos três pares: $(3, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$;
     - montamos então os pares $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$, usando a primeira coordenada do par $(2, 3)$ de R e a segunda coordenada de cada um dos pares $(3, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$ de S, e acrescentamos os pares $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$ na lista de elementos de $R \circ S$:

Lista (em construção) de elementos de $R \circ S$:
$(1,1),(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)$

- Pegamos o quarto par em R: $(3,3)$;
  - procuramos em S os pares que têm 3 na primeira coordenada e encontramos três pares: $(3,1)$, $(3,2)$ e $(3,4)$;
  - montamos então os pares $(3,1)$, $(3,2)$ e $(3,4)$, usando a primeira coordenada do par $(3,3)$ de R e a segunda coordenada de cada um dos pares $(3,1)$, $(3,2)$ e $(3,4)$ de S, e acrescentamos os pares $(3,1)$, $(3,2)$ e $(3,4)$ na lista de elementos de $R \circ S$:

    Lista (em construção) de elementos de $R \circ S$:
    $(1,1),(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)$
- Pegamos o quinto par em R: $(3,4)$;
  - procuramos em S os pares que têm 4 na primeira coordenada e não encontramos nenhum par;
  - nesse caso, nenhum par é montado e a lista de elementos em $R \circ S$ permanece a mesma:

    Lista (em construção) de elementos de $R \circ S$:
    $(1,1),(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)$
- Como $(3,4)$ era o último par em R, terminamos de escrever a lista de elementos de $R \circ S$, que ficou assim:

  Lista (completa) de elementos de $R \circ S$:
  $(1,1),(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)$
- Podemos, agora, eliminar as repetições, para ter uma apresentação melhor da composição de R com S:

  Lista (completa) de elementos de $R \circ S$:
  $(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)$

Resposta: $R \circ S = \{(1{,}1),(1{,}2),(1{,}4),(2{,}1),(2{,}2),(2{,}4),(3{,}1),(3{,}2),(3{,}4)\}$.

(II)

1. *Resposta:* Verdadeiro. *Justificativa:*

   <u>Prova:</u>

   Sejam R, S e T endorrelações em um conjunto A.

   Seja $(x,y) \in R \circ (S \cap T)$.

   Daí, $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in S \cap T$, para algum $z \in A$.

   Como $(z,y) \in S \cap T$, temos que $(z,y) \in S$ e $(z,y) \in T$.

   Como $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in S$, temos que $(x,y) \in R \circ S$.

   Como $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in T$, temos que $(x,y) \in R \circ T$.

   Como $(x,y) \in R \circ S$ e $(x,y) \in R \circ T$, temos que $(x,y) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$.

   Logo, $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$. ■

2. *Resposta:* Falso. *Justificativa:*

   Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e as relações $R = \{(a, c), (a, d)\}$, $S = \{(c, b)\}$ e $T = \{(d, b)\}$. Temos que R, S e T são endorrelações no conjunto A.

   Temos que $S \cap T = \emptyset$.

   Logo, $R \circ (S \cap T) = \emptyset$.

   Temos também que $R \circ S = \{(a, b)\}$ e $R \circ T = \{(a, b)\}$.

   Logo, $(R \circ S) \cap (R \circ T) = \{(a, b)\}$.

   Assim, como $(a, b) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$ e $(a, b) \notin R \circ (S \cap T)$, podemos concluir que $(R \circ S) \cap (R \circ T) \nsubseteq R \circ (S \cap T)$.

7.10 Exercícios de fixação e revisão

1. Descreva a diferença entre (a, b) e $\{a, b\}$.

2. Sim ou não?

   (a) $\{a, b\} = \{b, a\}$?
   (b) $(a, b) = (b, a)$?
   (c) $(a, b) = \{a, b\}$?

3. Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{2, 4, 6\}$, apresente cada um dos conjuntos a seguir por lista:

   (a) $A \times A$
   (b) $A \times B$
   (c) $B \times A$
   (d) $(A \times B) \cap (C \times B)$
   (e) $(A \cap C) \times B$

4. Prove que, para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

   (a) Se $A \subseteq B$, então $A \times C \subseteq B \times C$.
   (b) $(A \times B)^{-1} = B \times A$.
   (c) $(A \times B) \circ (A \times B) \subseteq A \times B$.

5. Em cada item a seguir, considere que R é uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e determine o domínio e a imagem de R.

   (a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 4)\}$
   (b) $R = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 3), (3, 2), (4, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (c) $R = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 3), (3, 2), (4, 2)\}$
   (d) $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$
   (e) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (f) $R = \emptyset$

(g) $R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,3),(3,2),(2,2)\}$
(h) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}$
(i) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
(j) $R = A \times A$
(k) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(1,4)\}$
(l) $R = A \times \emptyset$

6. Para cada relação R da questão anterior, calcule R^{-1}.

7. Em cada item a seguir, onde R e S são relações em $A = \{1,2,3,4\}$, calcule $R \circ S$.

(a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(1,4)\}$
$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(b) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,4)\}$
$S = \{(2,3),(3,4),(2,4),(4,3),(3,2),(4,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(c) $R = \{(2,3),(3,4),(2,4),(4,3),(3,2),(4,2)\}$
$S = \emptyset$
(d) $R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,3),(3,2),(2,2)\}$
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}$
(e) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
$S = A \times A$
(f) $R = \{(1,2),(2,3)\}$
$S = \mathsf{Id}_A$

8. Prove que, para quaisquer relações R, S, T, T_1 e T_2 em um conjunto A, temos que:

(a) Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
(b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
(c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
(d) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.
(e) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
(f) Se $R \subseteq T_1$ e $S \subseteq T_2$, então $R \circ S \subseteq T_1 \circ T_2$.
(g) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
(h) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.
(i) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$.
(j) $\emptyset \circ R = \emptyset$.
(k) $(R \circ S) - (R \circ T) \subseteq R \circ (S - T)$.

Capítulo 8

Relações de Equivalência

Neste capítulo, apresentamos as propriedades da reflexividade, simetria e transitividade de relações. Definimos relações de equivalência e partições de um conjunto. Definimos também o quociente de um conjunto por uma relação de equivalência. Observamos as conexões entre uma relação de equivalência em um conjunto A, uma certa partição de A e o conjunto quociente de A pela relação de equivalência.

8.1 Igualdade

A relação de igualdade é o paradigma para a definição de um dos conceitos mais importantes da Matemática: a noção de *relação de equivalência*.

Observe as propriedades básicas da igualdade:

(1) Para todo $x \in A$, temos que $x = x$.

(2) Para todos $x, y \in A$, se $x = y$, então $y = x$.

(3) Para todos $x, y, z \in A$, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

Definimos como relação de equivalência qualquer relação que possua essas propriedades. A ideia é que vamos usar as relações de equivalência "no lugar" da igualdade. Uma relação de equivalência "identifica" objetos que não são iguais, mas que, para o que nos interessa em um dado contexto, são "equivalentes".

8.2 Reflexividade

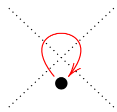
Uma relação em um conjunto A é *reflexiva* quando todos os elementos de A estão relacionados consigo mesmos. Por exemplo, segundo *Ru Paul*[1], a relação de amor/amizade deveria ser reflexiva: todas as pessoas deveriam amar a si mesmas ("*if you don't love yourself, how in the hell you gonna love somebody else?*").

Definição 8.1 *Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que R é <u>reflexiva</u> quando, para todo $x \in A$, temos que $(x, x) \in R$.*

[1] Ru Paul é ator, produtor, apresentador, superestrela drag dos EUA.

Assim, uma relação R em um conjunto A **não** é reflexiva quando existe $x \in A$ tal que $(x, x) \notin R$.

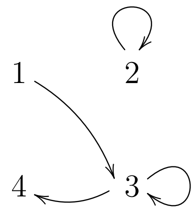
Em um grafo direcionado, as arestas que ligam um nó a si mesmo são chamadas de *laços*. Se uma relação R em um conjunto finito A é reflexiva, o grafo $G[R]$ *não* pode apresentar um nó sem um laço.



Usamos a cor vermelha para indicar que o laço está faltando: quando a relação é *reflexiva*, ter nó mas não ter laço *é proibido*.

Exemplo 8.1 *A relação* $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ *sobre* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *não é reflexiva.*

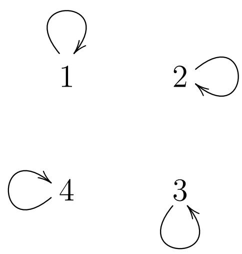
$G[R]$:



Examinando o grafo de R*, observamos que o nó* 1 *não tem laço. Aliás, o nó* 4 *também não tem laço, mas basta um só nó sem laço em* $G[R]$ *para que* R *não seja reflexiva.*

Vamos examinar o grafo da relação identidade no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$G[\mathsf{Id}_A]$:



Pensando na configuração proibida para a reflexividade, percebemos que uma relação qualquer em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é reflexiva se, e somente se, contém a relação identidade Id_A. Na verdade, isso vale para qualquer conjunto, inclusive para os conjuntos infinitos.

Teorema 8.1 *Para todo conjunto* A *e toda relação* R *em* A*, temos que* R *é reflexiva se, e somente se,* $\mathsf{Id}_A \subseteq R$.

Prova:
Seja R uma relação em um conjunto A.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que R é reflexiva. Seja $(x, y) \in \mathsf{Id}_A$. Daí, pela definição de Id_A, temos que $x = y$. Logo, como R é reflexiva, temos que $(x, y) \in R$. Portanto, $\mathsf{Id}_A \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathsf{Id}_A \subseteq R$. Seja $x \in A$. Pela definição de Id_A, temos que $(x, x) \in \mathsf{Id}_A$. Logo, como $\mathsf{Id}_A \subseteq R$, temos que $(x, x) \in R$. Portanto, R é reflexiva. ∎

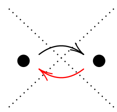
8.3 Simetria

Uma relação em um conjunto A é *simétrica* quando o fato de um elemento de A estar relacionado com um outro é garantia de que esse outro está relacionado com o primeiro. Por exemplo, a relação "ser filhote da mesma ninhada de" é uma relação simétrica. De fato, se soubéssemos que, por exemplo, Rintintin *é filhote da mesma ninhada de* Lassie, poderíamos concluir que Lassie *é filhote da mesma ninhada de* Rintintin.

Definição 8.2 *Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que R é simétrica quando, para todos $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.*

Assim, uma relação R em um conjunto A **não** é simétrica quando existem $x, y \in A$ tais que $(x, y) \in R$, mas $(y, x) \notin R$.

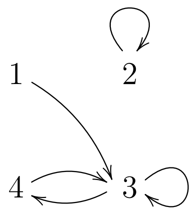
Se R é uma relação sobre um conjunto finito A e R é simétrica, então o grafo de R *não* pode ter uma aresta $\longrightarrow$ ligando dois nós sem ter uma aresta $\longleftarrow$ na direção oposta. Ou seja, se uma relação R em um conjunto finito A é simétrica, o grafo $G[R]$ não pode apresentar uma aresta "que vai", sem ter uma aresta "que volta".



Usamos a cor vermelha para indicar que a aresta está faltando: quando a relação é *simétrica*, aresta que vai mas não volta *é proibido.*

Exemplo 8.2 *A relação $R = \{(1,3),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$ sobre $A = \{1,2,3,4\}$ não é simétrica.*

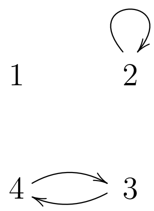
$G[R]$:



Existe uma aresta que sai do nó 1 e vai para o nó 3, mas não existe uma aresta que volta do nó 3 para o nó 1.

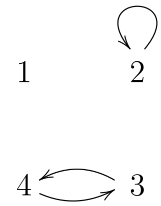
Vamos examinar o grafo da relação $S = \{(2,2),(3,4),(4,3)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$:

$G[S]$:



Pensando na configuração proibida para a simetria, percebemos que a relação S é simétrica. Vamos examinar, agora, o grafo da inversa de S, obtido invertendo-se o sentido de todas as setas de $G[S]$:

$G[S^{-1}]$:



Como S é simétrica, no grafo de S, toda seta que "vai" também "volta". Por isso, quando invertemos o sentido das setas do grafo de S, obtemos o mesmo grafo. Ou seja, porque S é simétrica, a inversa de S é a própria S. Na verdade, isso vale para qualquer relação, inclusive para relações em conjuntos infinitos.

Teorema 8.2 *Para todo conjunto A e toda relação R em A, temos que R é simétrica se, e somente se, $R^{-1} = R$.*

Prova:
Seja R uma relação em um conjunto A.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que R é simétrica.

($\subseteq$) Sejam $x, y \in A$. Suponhamos que $(x, y) \in R^{-1}$. Daí, pela definição de inversão, temos que $(y, x) \in R$. Daí, como R é simétrica, temos que $(x, y) \in R$. Logo, $R^{-1} \subseteq R$.

($\supseteq$) Sejam $x, y \in A$. Suponhamos que $(x, y) \in R$. Daí, como R é simétrica, temos que $(y, x) \in R$. Daí, pela definição de inversão, temos que $(x, y) \in R^{-1}$. Logo, $R \subseteq R^{-1}$.
Como $R^{-1} \subseteq R$ e $R \subseteq R^{-1}$, temos que $R^{-1} = R$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $R^{-1} = R$. Sejam $x, y \in A$. Suponhamos que $(x, y) \in R$. Daí, como $R^{-1} = R$, temos que $(x, y) \in R^{-1}$. Daí, pela definição de inversão, temos que $(y, x) \in R$. Portanto, R é simétrica. ∎

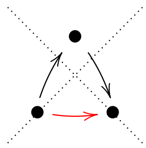
8.4 Transitividade

Uma relação em um conjunto A é *transitiva* quando o fato de um elemento de A estar relacionado com um outro e esse outro com um terceiro é garantia de que o primeiro está relacionado com o terceiro. Por exemplo, a relação "ser menor do que" é uma relação transitiva. De fato, se sabemos que, por exemplo, o número ϕ (a razão áurea) *é menor do que* o número $\mathbf{e}$ (número de Euler) e que o número $\mathbf{e}$ *é menor do que* o número π, podemos concluir que ϕ *é menor do que* π. Ou seja, como $\phi < \mathbf{e} < \pi$, temos que $\phi < \pi$.

Definição 8.3 *Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que R é <u>transitiva</u> quando, para todos $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Assim, uma relação R em um conjunto A **não** é transitiva quando existem $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, mas $(x, z) \notin R$.

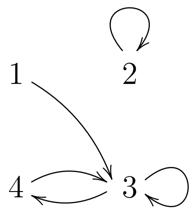
Se R é uma relação sobre um conjunto finito A e R é transitiva, então o grafo de R *não* pode ter uma aresta $x \longrightarrow y$ que sai do nó x e chega no nó y e ter também uma aresta $y \longrightarrow z$ que sai do nó y e chega no nó z, sem ter uma terceira aresta que sai do nó x e chega no nó z: $x \xrightarrow{\qquad} z$. Ou seja, se uma relação R em um conjunto finito A é transitiva, o grafo $G[R]$ não pode apresentar um caminho *comprido* $x \longrightarrow y \longrightarrow z$ sem apresentar também um *atalho* $x \longrightarrow z$.



Usamos a cor vermelha para indicar que a aresta está faltando: quando a relação é *transitiva*, caminho comprido sem atalho *é proibido.*

Exemplo 8.3 *A relação* $R = \{(1,3),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$ *sobre* $A = \{1,2,3,4\}$ *não é transitiva.*

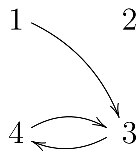
$G[R]$:



Existe um caminho comprido do nó 1 *para o nó* 4 *(passando pelo nó* 3*), mas não existe um atalho que vá do nó* 1 *diretamente para o nó* 4.

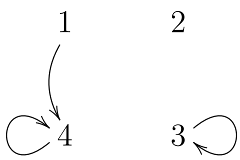
Vamos examinar o grafo da relação $T = \{(1,3),(3,4),(4,3)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$:

$G[T]$:



Pensando na configuração proibida para a transitividade, percebemos que a relação T *não* é transitiva. Vamos examinar, agora, o grafo da relação $T \circ T = \{(1,4),(3,3),(4,4)\}$, a composta de T com T:

$G[T \circ T]$:



Note que, no grafo de $T \circ T$, aparecem as setas que estão faltando no grafo de T que caracterizam a configuração proibida para a transitividade: temos $(1,3) \in T$ e $(3,4) \in T$, mas $(1,4) \notin T$; temos $(3,4) \in T$ e $(4,3) \in T$, mas $(3,3) \notin T$; temos $(4,3) \in T$ e $(3,4) \in T$, mas $(4,4) \notin T$. Ou seja, no grafo de $T \circ T$ temos as setas que deveriam estar no grafo de T para que a relação T fosse transitiva. Assim, se $T \circ T \subseteq T$, teríamos que T é transitiva. Na verdade, isso vale para qualquer relação, inclusive para relações em conjuntos infinitos.

Teorema 8.3 *Para todo conjunto* A *e toda relação* R *em* A*, temos que* R *é transitiva se, e somente se,* $R \circ R \subseteq R$.

Prova:
Seja R uma relação em um conjunto A.

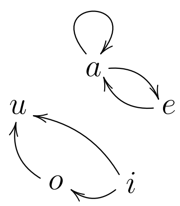
($\Longrightarrow$) Suponhamos que R é transitiva. Sejam $x, y \in A$. Suponhamos que $(x, y) \in R \circ R$. Daí, pela definição de composição, temos que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$, para algum $z \in A$. Daí, como R é transitiva, temos que $(x, y) \in R$. Logo, $R \circ R \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $R \circ = R$. Sejam $x, y, z \in A$. Suponhamos que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$. Daí, pela definição de composição, temos que $(x, y) \in R \circ R$. Daí, como $R \circ R \subseteq R$, temos que $(x, y) \in R$. Portanto, R é transitiva. ∎

Exemplo 8.4 *Considere o conjunto finito* $A = \{a, e, i, o, u\}$, *a relação*

$$R = \{(a, a), (a, e), (e, a), (i, o), (o, u), (i, u)\}$$

e o grafo $G[R]$*:*

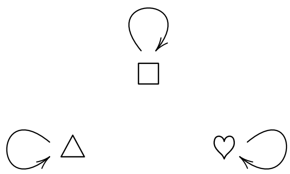


A relação R não é reflexiva, pois o nó e não tem laço; não é simétrica, pois a aresta $i \to o$ vai, mas não volta; não é transitiva, pois temos um caminho comprido $e \to a \to e$ mas não temos o atalho $e \to e$.

Exemplo 8.5 *Considere o conjunto finito* $A = \{\triangle, \square, \heartsuit\}$, *a relação*

$$\mathsf{Id}_A = \{(\triangle, \triangle), (\square, \square), (\heartsuit, \heartsuit)\}$$

de identidade em A e o grafo $G[\mathsf{Id}_A]$:



A relação Id_A é reflexiva, pois não tem um nó sem laço; é simétrica, pois não tem aresta que vai e não volta; é transitiva, pois não tem nenhum caminho comprido sem atalho.

Exercício 22 *Para se familiarizar com as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade de relações, investigue se cada a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.*

1. *Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.*
2. *Se R é reflexiva, então $R \cup S$ é reflexiva.*
3. *Se R e S são transitivas, então $R \cup S$ é transitiva.*

8.5 Relação de equivalência

Definição 8.4 *Sejam A um conjunto e R uma relação em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência em A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.*

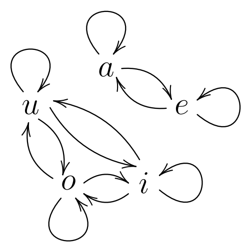
O fecho reflexivo de uma relação R é a relação S que é reflexiva, que contém R e tal que qualquer outra relação reflexiva que contém R também contém S.

O fecho simétrico de uma relação R é a relação S que é simétrica, que contém R e tal que qualquer outra relação simétrica que contém R também contém S.

O fecho transitivo de uma relação R é a relação S que é simétrica, que contém R e tal que qualquer outra relação transitiva que contém R também contém S.

O fecho reflexivo-simétrico-transitivo de uma relação R é a relação S que é reflexiva, simétrica e transitiva que contém R e tal que qualquer outra relação reflexiva, simétrica e transitiva que contém R também contém S. Ou seja, o fecho reflexivo-simétrico-transitivo de uma relação R é uma relação de equivalência que contém R e que está contida em qualquer outra relação de equivalência que contém R.

Exemplo 8.6 *Considere agora o fecho reflexivo-simétrico-transitivo da relação R apresentada no Exemplo 8.4, denotado por R^*, e seu grafo $G[R^*]$:*

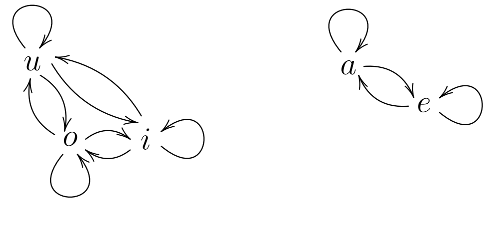


Para formar $G[R^*]$, acrescentamos todos os laços que faltavam em $G[R]$, acrescentamos uma aresta que volta para cada uma que vai em $G[R]$, acrescentamos o "atalho" para cada "caminho comprido" em $G[R]$. Assim, a relação R^* é:

$$\{(a,a),(a,e),(e,a),(e,e),(i,i),(i,o),(o,i),(i,u),(u,i),(o,o),(o,u),(u,o),(u,u)\}$$

Observando o grafo da relação R^*, no Exemplo 8.6, podemos ver que seus nós estão divididos em dois "grupos":

- entre cada par de nós de um mesmo "grupo" temos uma aresta que vai e outra que volta,
- não temos arestas entre nós de "grupos" diferentes.



Na verdade, isso acontece sempre: uma relação de equivalência divide os elementos do conjunto em grupos em que todos os elementos se relacionam entre si e que estão isolados dos outros grupos (nenhum elemento de um grupo se relaciona com um elemento de outro grupo). Esses "grupos" são chamados de *classes de equivalência*.

Definição 8.5 *Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A, e a um elemento de A. A classe de equivalência de a segundo R é o conjunto*

$$[a]_R = \{b \in A : (a, b) \in R\}.$$

O conjunto formado por todas as classes de equivalência de uma determinada relação de equivalência é chamado *conjunto quociente*.

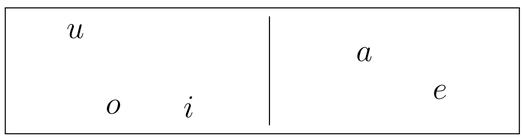
Definição 8.6 *Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência em A. O conjunto quociente de A por R é o conjunto*

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

Exercício 23 *Prove que, para toda relação de equivalência R em um conjunto A e todos os elementos $x, y, z \in A$:*

1. *Se $x \in [z]_R$ e $y \in [z]_R$, então $(x, y) \in R$.*
2. *Se $x \in [z]_R$ e $y \notin [z]_R$, então $(x, y) \notin R$.*

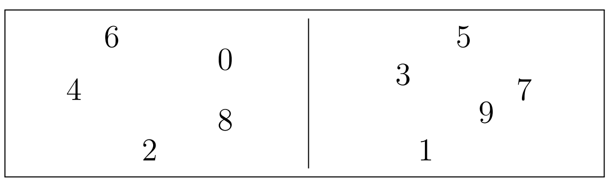
Exemplo 8.7 *Como sabemos que a relação R^* do Exemplo 8.6 é uma relação de equivalência, poderíamos apagar todas as arestas de $G[R^*]$, pois as arestas representam informação redundante quando é fácil ver os nós separados nas classes de equivalência:*



Esses dois grupos de nós, $\{a, e\}$ e $\{i, o, u\}$, são as classes de equivalência de A por R^* e $A/R^* = \{\{a, e\}, \{i, o, u\}\}$ é o conjunto quociente de A por R^*.

Um diagrama para uma relação de equivalência melhor do que o grafo da relação é uma representação do conjunto quociente associado à relação, como essa do Exemplo 8.7.

Exemplo 8.8 *Considere o conjunto dos dígitos $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e a relação $R = \{(a, b) \in D \times D : a \text{ e } b \text{ são ambos pares, ou ambos ímpares}\}$ em D que associa dígitos de mesma paridade. O diagrama da relação R é:*



O conjunto quociente de D por R é $D/R = \{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}\}$.

Congruência módulo n e múltiplos de n. Um exemplo importante de relação de equivalência no conjunto de números naturais é a relação de congruência módulo n.

Definição 8.7 *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a e b são congruentes módulo n, denotado por $a \equiv_n b$, quando existem $q_a, q_b, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = q_a n + r$ e $b = q_b n + r$, com $0 \leq r < n$.*

Definição 8.8 *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. A relação de congruência módulo n é a relação:*

$$\{(a, b) : a \equiv_n b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a relação de congruência módulo n é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$. Dado $a \in \mathbb{N}$, a classe de equivalência de a na congruência módulo n é usualmente denotada por $[a]_n$ e o conjunto quociente de $\mathbb{N}$ por $\equiv_n$ é:

$$\mathbb{N}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n\}.$$

Observe que $\mathbb{N}_n$ é um conjunto *finito* e que

$$\mathbb{N} = [0]_n \cup [1]_n \cup [2]_n \cup \ldots \cup [n-1]_n.$$

Por exemplo, $\mathbb{N}_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ é um conjunto com 4 elementos e

$$[0]_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\},$$

$$[1]_4 = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\},$$

$$[2]_4 = \{2, 6, 10, 14, 18, \ldots\},$$

$$[3]_4 = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\},$$

$$\mathbb{N} = [0]_4 \cup [1]_4 \cup [2]_4 \cup [3]_4.$$

Observe que a classe do 0 módulo 4 é o conjunto de todos os múltiplos de 4:

$$[0]_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}.$$

Definição 8.9 *Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos múltiplos de n é definido por*

$$M(n) = \{m \in \mathbb{N} : \text{ existe } q \in \mathbb{N} \text{ tal que } m = nq\}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
M(0) &= \{0\} \\
M(1) &= \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} = \mathbb{N} \\
M(2) &= \{0, 2, 4, \ldots\} = [0]_2 \\
M(3) &= \{0, 3, 6, \ldots\} = [0]_3 \\
M(4) &= \{0, 4, 8, \ldots\} = [0]_4 \\
&\vdots \\
M(n) &= \{0, n, 2n, \ldots\} = [0]_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Considere o conjunto $\mathcal{M}$ cujos elementos são os conjuntos de múltiplos de cada número natural:

$$\mathcal{M} = \{M(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que $\mathcal{M}$ é um conjunto *infinito* cujos elementos são conjuntos (infinitos ou não). Podemos dizer que o conjunto dos números naturais é a união de todos esses (infinitos) $M(n)$. Informalmente, temos:

$$\mathbb{N} = M(0) \cup M(1) \cup M(2) \cup M(3) \cup \cdots \cup M(n) \cup \cdots$$

União generalizada. A união de conjuntos foi definida como uma operação binária: dados dois conjuntos A e B, podemos calcular $A \cup B$. Vamos agora generalizar, definindo a união de uma quantidade qualquer (infinita, inclusive) de conjuntos.

Definição 8.10 *Seja $\mathcal{F}$ um conjunto. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família se todos os elementos de $\mathcal{F}$ são conjuntos.*

Definição 8.11 *Seja $\mathcal{U}$ um universo e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{U}$. A união de $\mathcal{F}$ é o conjunto definido por*

$$\bigcup \mathcal{F} = \{a \in \mathcal{U} : \textit{ existe } X \in \mathcal{F} \textit{ tal que } a \in X\}.$$

Algumas vezes, uma família $\mathcal{F}$ é definida por intermédio de um conjunto de índices I, cujos elementos correspondem aos conjuntos em $\mathcal{F}$. Neste caso, temos que

$$\mathcal{F} = \{X_i : i \in I\}$$

e podemos usar as seguintes notações para $\bigcup \mathcal{F}$:

$$\bigcup\{X_i : i \in I\}, \qquad \bigcup_{i \in I} X_i \qquad \text{ou} \qquad \bigcup X_i.$$

Essas notações são usadas, principalmente, quando a família é infinita, ou finita, mas muito grande.

Por exemplo, dada a família $\mathcal{M} = \{M(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dos conjuntos de múltiplos, temos que $\bigcup \mathcal{M} =$

$$\bigcup\{M(n) : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(n) = \bigcup M(n) =$$

$$\{a \in \mathbb{N} : \text{ existe } X \in M \text{ tal que } a \in X\} =$$

$$\{a \in \mathbb{N} : \text{ existe } M(n) \text{ tal que } a \in M(n)\} =$$

$$\{a \in \mathbb{N} : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a \in M(n)\}.$$

Interseção generalizada. Assim como foi feito para a união, vamos também generalizar a operação de interseção de conjuntos para calcular a interseção de uma quantidade (não nula) qualquer de conjuntos.

Definição 8.12 *Seja $\mathcal{U}$ um universo e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. A* <u>*interseção*</u> *de $\mathcal{F}$ é o conjunto definido por*

$$\bigcap \mathcal{F} = \{a \in \mathcal{U} : \text{ para todo } X \in \mathcal{F} \text{ temos que } a \in X\}.$$

Quando $\mathcal{F}$ é definida por intermédio de um conjunto *não vazio* de índices I, ou seja, quando

$$\mathcal{F} = \{X_i : i \in I\},$$

podemos usar as seguintes notações para $\bigcap \mathcal{F}$:

$$\bigcap \{X_i : i \in I\}, \qquad \bigcap_{i \in I} X_i \qquad \text{ou} \qquad \bigcap X_i.$$

Exercício 24 *(1) Determine $\bigcap \mathbb{N}_4$.*

(2) Determine $\bigcap \mathcal{M}$.

Propriedades básicas

Sejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ famílias de conjuntos, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}'_1$ e $\mathcal{F}'_2$ famílias *não vazias* de conjuntos e A um conjunto. Temos que:

(1) Se $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, então $\bigcup \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcup \mathcal{F}_2$.

(2) Se $\mathcal{F}'_1 \subseteq \mathcal{F}'_2$, então $\bigcap \mathcal{F}'_2 \subseteq \bigcap \mathcal{F}'_1$.

(3) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

(4) Se $A \in \mathcal{F}'$, então $\bigcap \mathcal{F}' \subseteq A$.

(5) $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

(6) $A \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{A \cap X : X \in \mathcal{F}\}$.

(7) $A \cup \bigcap \mathcal{F}' = \bigcap \{A \cup X : X \in \mathcal{F}'\}$.

(8) $\left(\bigcup \mathcal{F}'\right)^{\complement} = \bigcap \{X^{\complement} : X \in \mathcal{F}'\}$.

(9) $\left(\bigcap \mathcal{F}'\right)^{\complement} = \bigcup \{X^{\complement} : X \in \mathcal{F}'\}$.

Partição. Dada uma relação de equivalência R em um conjunto A, temos que as classes de equivalência de A por R são não vazias, são disjuntas, e a união de todas elas é o próprio A.

Proposição 8.1 *Para todo conjunto A, toda relação de equivalência R em A:*

(1) Para todo $x \in A$, temos que $[x]_R \neq \emptyset$.

(2) Para todos $x, y \in A$, se $[x]_R \neq [y]_R$, então $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

(3) $\bigcup A/R = A$.

Exercício 25 *Prove a Proposição 8.1.*

Famílias de conjuntos com as características (1), (2), e (3), da Proposição 8.1, são chamadas de *partições*.

Definição 8.13 *Seja A um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma partição de A quando*

(1) Para todo $X \in \mathcal{F}$, temos que $X \neq \emptyset$.

(2) Para todos $X, Y \in \mathcal{F}$, se $X \neq Y$, então $X \cap Y = \emptyset$.

(3) $\bigcup \mathcal{F} = A$.

Partições e relações de equivalência são conceitos fortemente conectados: dada uma relação de equivalência, temos definida uma partição (o conjunto quociente, veja a Proposição 8.1) e, dada uma partição, temos definida uma relação de equivalência.

Definição 8.14 *Seja A um conjunto e $\mathcal{P}$ uma partição em A. A relação induzida por $\mathcal{P}$ é a relação em A definida por:*

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A \times A : \text{ existe } X \in \mathcal{P} \text{ tal que } a, b \in X\}.$$

Proposição 8.2 *Para todo conjunto A, se $\mathcal{P}$ é uma partição em A e $R_{\mathcal{P}}$ é a relação induzida por $\mathcal{P}$, então $R_{\mathcal{P}}$ é uma relação de equivalência em A.*

Exercício 26 *1. Dado um conjunto A e uma partição $\mathcal{P}$ em A:*

(a) Quais são as classes de equivalência de $R_{\mathcal{P}}$?

(b) Qual é o conjunto quociente $A/R_{\mathcal{P}}$?

2. Prove a Proposição 8.2.

8.6 Exercício resolvido

Verdadeiro ou falso?

1. Para todas as endorrelações R e S em um conjunto A, se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.

2. Para todas as endorrelações R e S em um conjunto A, se R e S são transitivas, então $R \cup S$ é transitiva.

- RESOLUÇÃO -

1. *Resposta:* Verdadeiro. *Justificativa:*

   Prova:

   Sejam R e S endorrelações em um conjunto A.

   Suponhamos que R e S são simétricas.

   Seja $(x, y) \in R \cup S$.

Daí, $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$.

(Caso 1: $(x, y) \in R$)
Nesse caso, como R é simétrica, temos que $(y, x) \in R$.
Daí, como $R \subseteq R \cup S$, temos que $(y, x) \in R \cup S$.

(Caso 2: $(x, y) \in S$)
Nesse caso, como S é simétrica, temos que $(y, x) \in S$.
Daí, como $S \subseteq R \cup S$, temos que $(y, x) \in R \cup S$.

Em qualquer caso, $(y, x) \in R \cup S$.
Logo, $R \cup S$ é simétrica. ■

2. *Resposta:* Falso. *Justificativa:*
   Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações $R = \{(1, 2)\}$ e $S = \{(2, 3)\}$ em A. Temos que $R \cup S = \{(1, 2), (2, 3)\}$. Temos também que R e S são transitivas. No entanto, $R \cup S$ não é transitiva, pois $(1, 2) \in R \cup S$ e $(2, 3) \in R \cup S$, mas $(1, 3) \notin R \cup S$.

8.7 Exercícios de fixação e revisão

1. Em cada item a seguir, considere que R é uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e diga se R é reflexiva, se é simétrica e se é transitiva.
   (a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 4)\}$
   (b) $R = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 3), (3, 2), (4, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (c) $R = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 3), (3, 2), (4, 2)\}$
   (d) $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$
   (e) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (f) $R = \emptyset$
   (g) $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2)\}$
   (h) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
   (i) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
   (j) $R = A \times A$
   (k) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$
   (l) $R = A \times \emptyset$

2. Em cada item, dê um exemplo de uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, que seja:
   (a) reflexiva, mas não simétrica nem transitiva;
   (b) simétrica, mas não reflexiva nem transitiva;
   (c) transitiva, mas não simétrica nem reflexiva;
   (d) reflexiva e simétrica, mas não transitiva;
   (e) reflexiva e transitiva, mas não simétrica;

(f) simétrica e transitiva, mas não reflexiva;
(g) reflexiva, simétrica e transitiva;
(h) não reflexiva, nem simétrica e nem transitiva.

3. Em cada item a seguir, diga se a relação é reflexiva, se é simétrica e se é transitiva.
   (a) A relação de "ser irmão de", no conjunto de todas as pessoas.
   (b) A relação de "ser irmão de", no conjunto de todos os homens.
   (c) A relação de "ser menor que", no conjunto de todos os números reais.
   (d) A relação de "ser igual a", no conjunto de todos os números reais.
   (e) A relação de "ser menor ou igual a", no conjunto de todos os números reais.
   (f) A relação de "ser diferente de", no conjunto de todos os números reais.
   (g) A relação de "ser perpendicular a", no conjunto de todas as retas de um plano.
   (h) A relação de "ser da mesma série que ou fazer aniversário no mesmo dia que", no conjunto de todas as crianças de uma escola de ensino fundamental.
   (i) A relação de "ser pai de", no conjunto de todas as pessoas.
   (j) A relação de "ser o quadrado de ou ser igual a", no conjunto de todos os números reais.

4. Apresente as classes de equivalência da relação de congruência módulo 4 em $\mathbb{N}$ por (indicação de) listagem.

5. Considere o conjunto universo $\mathcal{U}$ das palavras em língua portuguesa e a relação R sobre $\mathcal{U}$ que associa palavras que começam pela mesma letra.
   (a) Apresente três exemplos de pares de palavras que estão na relação R.
   (b) Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathcal{U}$.
   (c) Apresente três exemplos de palavras que pertencem à classe de equivalência da palavra MATEMÁTICA, segundo a relação R.
   (d) Quantos elementos temos no conjunto quociente $\mathcal{U}/R$?

6. Em cada item a seguir, verifique que R é uma relação de equivalência em A, encontre as classes de equivalência de A segundo R e a partição de A induzida por R.
   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$
   (b) $A = \{1, 2, 3\}$
   $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   (c) $A = \{a, b, c, d, e\}$
   $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (c,a), (b,d), (b,e), (d,b), (d,e), (e,b), (e,d)\}$

7. Em cada item a seguir, $\mathcal{F}$ é uma partição sobre um conjunto A. Apresente o conjunto A e encontre a relação de equivalência determinada pela partição $\mathcal{F}$.
   (a) $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$
   (b) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$

(c) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

(d) $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$

8. A partição $\mathcal{F} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ induz a seguinte relação de equivalência em A:

$$\begin{array}{rcll} R & = & \{ & (1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5), \\ & & & (5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4) \quad \}. \end{array}$$

   Mostre que R é, de fato, uma relação de equivalência.

9. Verdadeiro ou falso? Justifique.

   Para qualquer conjunto A e quaisquer relações R e S em A, temos que:

   (a) Se R é reflexiva, então $R \cup S$ é reflexiva.

   (b) Se R é reflexiva e S é reflexiva, então $R \cap S$ é reflexiva.

   (c) Se R é simétrica e S é simétrica, então $R \cup S$ é simétrica.

   (d) Se R é transitiva e S é transitiva, então $R \cap S$ é transitiva.

   (e) Se R é transitiva e S é transitiva, então $R \cup S$ é transitiva.

   (f) Se R é simétrica, então R^{-1} é simétrica.

   (g) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

   (h) Se R é simétrica, então $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

Capítulo 9

Estrutura Quociente

Neste capítulo, apresentamos a noção de estrutura quociente, um conceito básico que aparece em todas as áreas da Matemática. Nosso exemplo mais importante vai ser a classe de estruturas quociente dadas pela relação de congruência módulo n no conjunto dos números inteiros. O estudo dessa classe de estruturas marca o início do desenvolvimento da Teoria dos Números.

Congruência módulo n

Definição 9.1 *Seja $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a e b são* <u>*congruentes módulo n*</u>*, denotado por $a \equiv_n b$, quando existem $q_a, q_b, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = nq_a + r$ e $b = nq_b + r$, com $0 \leq r < n$.*

Por exemplo, temos que $7 \equiv_3 13$, pois $7 = 3 \cdot 2 + 1$ e $13 = 3 \cdot 4 + 1$, ou seja, 7 e 13 têm mesmo resto na divisão por 3. Temos também que $-7 \equiv_3 -13$, pois $-7 = 3 \cdot (-3) + 1$ e $-13 = 3 \cdot (-5) + 1$, ou seja, -7 e -13 têm mesmo resto na divisão por 3. Mas $-7 \not\equiv_3 7$, pois 7 e -7 têm restos diferentes na divisão por 3.

Definição 9.2 *Seja $n \in \mathbb{Z}_+^*$. A* <u>*relação de congruência módulo n*</u> *é a relação:*

$$\{(a, b) : a \equiv_n b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Dados $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $a \in \mathbb{Z}$, a classe de equivalência de a na congruência módulo n é usualmente denotada por $[a]_n$. Por exemplo:

$$[7]_3 = [13]_3 = [1]_3 = \{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$$

$$[-7]_3 = [-13]_3 = [2]_3 = \{\ldots - 13, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$$

Proposição 9.1 *Para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$, a relação de congruência módulo n é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.*

Vamos fazer a prova da Proposição 9.1 no exercício a seguir.

Exercício 27 *Antes de fazer a prova da Proposição 9.1, vamos examinar o caso particular quando $n = 3$:*

1. *Prove que, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$,*

(a) $a \in [a]_3$.
(b) *Se* $a \not\equiv_3 b$, *então* $[a]_3 \cap [b]_3 = \emptyset$.
(c) *Se* $a \equiv_3 b$, *então* $[a]_3 = [b]_3$.

2. *Prove que a relação* $\equiv_3$ *de congruência módulo 3 é uma relação de equivalência em* $\mathbb{Z}$.

3. *Generalize a prova que você apresentou no item anterior para provar a Proposição 9.1.*

Dado $n \in \mathbb{Z}_+^*$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ por $\equiv_n$ é:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n\}.$$

Observe que $\mathbb{Z}_n$ é um conjunto *finito* e que

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup [2]_n \cup \ldots \cup [n-1]_n.$$

Por exemplo, $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$ é um conjunto com 3 elementos, com

$$\begin{aligned}
[0]_3 &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \\
[1]_3 &= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\} \\
[2]_3 &= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}
\end{aligned}$$

e $\mathbb{Z} = [0]_3 \cup [1]_3 \cup [2]_3$.

Dados $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $a \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é o *representante* da classe $[a]_n$. No entanto, sabemos que, para todos $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \in [b]_n$, então $[a]_n = [b]_n$. Ou seja, qualquer elemento da classe $[a]_n$ pode ser escolhido como representante da classe. Assim, poderíamos também escrever $\mathbb{Z}_3 = \{[12]_3, [7]_3, [-7]_3\}$. Em geral, os representantes das classes de equivalência módulo n escolhidos são os restos na divisão por n.

Vamos considerar, agora, as operações de adição e multiplicação de números inteiros. A relação de congruência módulo n "respeita" estas operações, no seguinte sentido:

Proposição 9.2 *Para todos* $n \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, *temos que:*

1. *se* $a \equiv_n b$ *e* $c \equiv_n d$, *então* $a + c \equiv_n b + d$;

2. *se* $a \equiv_n b$ *e* $c \equiv_n d$, *então* $ac \equiv_n bd$.

A Proposição 9.2 nos permite definir operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$, a partir da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Definição 9.3 *Sejam* $n \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $a, b \in \mathbb{Z}$. *A* <u>*soma*</u> *de* $[a]_n$ *e* $[b]_n$ *é definida como*

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n.$$

Observe a tabela da operação de adição em $\mathbb{Z}_3$:

$+$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

A operação de adição em $\mathbb{Z}_n$ "herda" várias propriedades da adição em $\mathbb{Z}$. É o que vamos discutir no Exercício 28, a seguir.

Exercício 28 *Vamos examinar algumas propriedades da operação de adição em* $\mathbb{Z}_n$.

1. *Mostre que, para todo* $n \in \mathbb{Z}_+^*$, *a operação de adição em* $\mathbb{Z}_n$ *é associativa e comutativa.*

2. *A operação de adição em* $\mathbb{Z}$ *tem elemento neutro. A operação de adição em* $\mathbb{Z}_n$ *também. Qual é o neutro da adição em* $\mathbb{Z}_n$*? (Justifique.)*

3. *Quando uma operação tem elemento neutro, podemos nos perguntar pelo simétrico ou inverso de um elemento. Em* $\mathbb{Z}$, *todo elemento tem simétrico em relação à operação de adição, isto é, para todo* $a \in \mathbb{Z}$, *existe um* $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a + b = 0$. *O que acontece em* $\mathbb{Z}_n$*? Podemos afirmar que, em* $\mathbb{Z}_n$, *todo elemento tem simétrico? (Justifique.)*

Vejamos, agora, a definição da operação de multiplicação em $\mathbb{Z}_n$.

Definição 9.4 *Sejam* $n \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $a, b \in \mathbb{Z}$. *O* *__produto__* *de* $[a]_n$ *e* $[b]_n$ *é definido como*

$$[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n.$$

Observe a tabela da multiplicação em $\mathbb{Z}_3$:

$\cdot$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[0]_3$	$[0]_3$
$[1]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[2]_3$	$[0]_3$	$[2]_3$	$[1]_3$

A operação de multiplicação em $\mathbb{Z}_n$ também "herda" várias propriedades da multiplicação em $\mathbb{Z}$. É o que vamos discutir no Exercício 29, a seguir.

Exercício 29 *Vamos examinar algumas propriedades da operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$.

1. *Mostre que, para todo* $n \in \mathbb{Z}_+^*$, *a operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$ *é associativa e comutativa.*

2. *A operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}$ *tem elemento neutro. A operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$ *também. Qual é o neutro da multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$*? (Justifique.)*

3. *A operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}$ *tem elemento zero, isto é, existe* $z \in \mathbb{Z}$ *tal que, para todo* $a \in \mathbb{Z}$, *temos que* $az = za = z$. *Qual é o (único) elemento zero da multiplicação em* $\mathbb{Z}$*? A operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$ *também tem elemento zero? (Justifique.)*

Quando uma operação tem elemento neutro, podemos nos perguntar pelo simétrico ou inverso de um elemento. Em $\mathbb{Z}$, quase nenhum elemento não nulo tem inverso em relação à operação de multiplicação. Por exemplo, $6 \in \mathbb{Z}$, $6 \neq 0$, mas não existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $6b = 1$. Na verdade, apenas 1 e -1 têm inverso, pois $1 \cdot 1 = 1$ e $(-1)(-1) = 1$. O que acontece em $\mathbb{Z}_n$? Bem... depende do valor de n.

Exercício 30 *Vamos investigar a existência do inverso de elementos em relação à operação de multiplicação em* $\mathbb{Z}_n$.

1. *Mostre que, para todo* $n \in \mathbb{Z}_+^*$, *temos que* $[1]_n$ *é o elemento neutro da operação de multiplicação, isto é, para todo* $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$, *temos que* $[a]_n \cdot [1]_n = [a]_n$.

2. *Mostre que, para todo* $n \in \mathbb{Z}_+^*$*, temos que* $[0]_n$ *é o elemento neutro da operação de multiplicação, isto é, para todo* $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$*, temos que* $[a]_n \cdot [0]_n = [0]_n$.

3. *Mostre que, para todo* $n \in \mathbb{Z}_+^*$*, temos que o elemento* $[1]_n$ *é o inverso dele mesmo, isto é,* $[1]_n \cdot [1]_n = [1]_n$.

4. *Mostre que, em* $\mathbb{Z}_3$*, todo elemento não nulo tem inverso, isto é, para todo* $[a]_3 \in \mathbb{Z}_3$*, existe* $[b]_3 \in \mathbb{Z}_3$ *tal que* $[a]_3 \cdot [b]_3 = [1]_3$.

5. *Mostre que, em* $\mathbb{Z}_4$*, existem elementos diferentes do elemento zero que não têm inverso, isto é, existe* $[a]_4 \in \mathbb{Z}_4$ *tal que* $[a]_4 \neq [0]_4$ *e, para todo* $[b]_4 \in \mathbb{Z}_4$*, temos que* $[a]_4 \cdot [b]_4 \neq [1]_4$.

Na verdade, quando p é um número primo, todo elemento diferente do elemento zero em $\mathbb{Z}_p$ tem inverso em relação à operação de multiplicação em $\mathbb{Z}_p$. Mas esse já é um assunto para um curso de Álgebra ou de Teoria dos Números, não vamos desenvolver mais esse assunto aqui.

Ao invés disso, vamos ver a noção geral de relação de congruência e estrutura quociente, e examinar alguns outros exemplos importantes.

9.1 Estrutura quociente

Definição 9.5 *Sejam* A *um conjunto,* $*$ *uma operação binária em* A *e* R *uma relação de equivalência em* A*. Dizemos que* R *é compatível com* $*$ *quando, para todos* $x, x', y, y' \in A$*, se* xRy *e* $x'Ry'$*, então* $x * y = x' * y'$.

Como vimos na seção anterior, a relação de congruência é compatível com as operações de adição e multiplicação de inteiros.

Definição 9.6 *Sejam* A *um conjunto,* r *uma relação binária em* A *e* R *uma relação de equivalência em* A*. Dizemos que* R *é compatível com* r *quando, para todos* $x, x', y, y' \in A$*, se* xRy *e* $x'Ry'$*, então* $x\mathsf{r}y$ *se, e somente se,* $x'\mathsf{r}y'$.

Definição 9.7 *Sejam* A *um conjunto,* P *uma propriedade sobre elementos de* A *e* R *uma relação de equivalência em* A*. Dizemos que* R *é compatível com* P *quando, para todos* $x, y \in A$*, se* xRy*, então* x *tem a propriedade* P *se, e somente se,* y *tem a propriedade* P.

Para quem já estudou matrizes, temos aqui um exemplo: a relação de equivalência entre matrizes quadradas de mesma ordem é uma relação de equivalência compatível com a propriedade de singularidade de matrizes quadradas.

Definição 9.8 *Sejam* M *e* N *matrizes de mesma ordem* n*. Dizemos que* M *e* N *são equivalentes quando é possível obter* M *de* N *usando as operações de somar duas linhas, multiplicar uma linha por um valor não nulo, e trocar a posição de duas linhas.*

A relação de equivalência entre matrizes é uma relação de equivalência no conjunto das matrizes quadradas de mesma ordem. Você sabe explicar por quê?

Definição 9.9 *Seja* M *uma matriz quadrada. Dizemos que* M *é singular quando seu determinante é nulo.*

A relação de equivalência entre matrizes quadradas é compatível com a propriedade de singularidade.

Proposição 9.3 *Para todas M e N matrizes quadradas de mesma ordem, se M e N são equivalentes, então o determinante de M é nulo se, e somente se, o determinante de N é nulo.*

Quando um conjunto A tem uma *estrutura* associada, com operações, funções, relações, e/ou propriedades que são compatíveis com uma determinada relação de equivalencia R definida em A, o conjunto quociente A/R também terá uma estrutura associada, com operações, funções, relações, e/ou propriedades correspondentes àquelas definidas no conjunto A. Já vimos um primeiro exemplo desse fenômeno quando definimos as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$. Vejamos, agora, o exemplo da estrutura quociente das matrizes quadradas (para o caso particular de ordem 2) com a relação de equivalência entre matrizes e a propriedade de ser singular.

O conjunto quociente das matrizes quadradas de ordem 2 com a relação de equivalência entre matrizes (Definição 9.8) possui infinitas classes de equivalência:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\sim, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\sim, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_\sim, \text{ e uma classe } \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\sim \text{ para cada } a \in \mathbb{R}.$$

Uma dessas classes (a classe da matriz nula) possui um único elemento. Todas as outras são infinitas.

Exercício 31 *Identifique as classes de equivalência listadas acima (elementos do conjunto quociente das matrizes quadradas de ordem 2 com a relação de equivalência entre matrizes) que são singulares.*

Capítulo 10

Relações de Ordem

Neste capítulo, apresentamos a propriedade da antissimetria de relações. Definimos relações de ordem e discutimos como diferenciar as ordens numéricas (sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

10.1 Motivação

Algumas relações organizam os objetos relacionados em níveis. Por exemplo, se observamos algumas pessoas sentadas em uma escadaria, podemos imaginar estas pessoas organizadas em níveis: quem está em um degrau mais baixo está em um nível inferior em relação às pessoas que estão em um degrau mais alto. Uma das relações mais famosas dentre as que organizam os objetos relacionados em níveis é a inclusão de conjuntos.

Relembremos as propriedades básicas da inclusão:

(1) Para todo conjunto A, temos que $A \subseteq A$.

(2) Para todos os conjuntos A, B, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

(3) Para todos os conjuntos A, B, C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Inclusão organiza os conjuntos

Considere o conjunto das partes do conjunto $\{x\}$:

$$P(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\},$$

o conjunto das partes do conjunto $\{x, y\}$:

$$P(\{x, y\}) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\},$$

e o conjunto das partes do conjunto $\{x, y, z\}$:

$$P(\{x, y, z\}) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

A seguir temos três diagramas, chamados *Diagramas de Hasse*, que representam como a relação de inclusão organiza os subconjuntos de $\{x\}$ em níveis (Diagrama 1): organiza os subconjuntos de $\{x, y\}$ em níveis (Diagrama 2) e organiza os subconjuntos de $\{x, y, z\}$ em níveis (Diagrama 3).

Diagrama 1

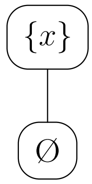


Diagrama 2

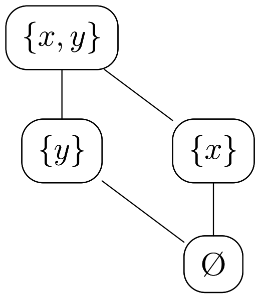
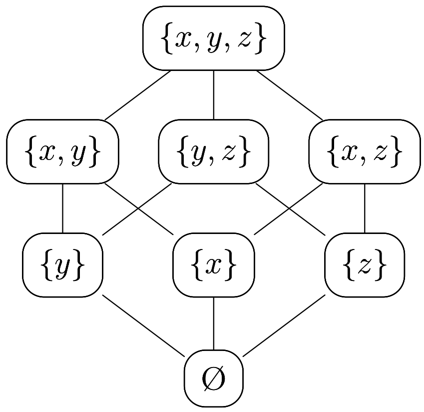


Diagrama 3

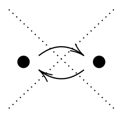


10.2 Relações de ordem

Qualquer relação que tem as mesmas propriedades básicas que a inclusão também organiza objetos em níveis. Duas das propriedades básicas da inclusão já são nossas conhecidas: a reflexividade e a transitividade. A outra é a antissimetria.

Definição 10.1 *Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que R é antissimétrica quando, para todos $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$.*

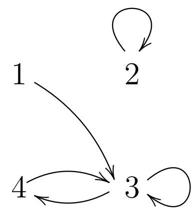
Uma relação R em um conjunto A **não** é antissimétrica quando existem $x, y \in A$ tais que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \notin R$, mas $x \neq y$. Assim, se R é uma relação sobre um conjunto finito A e R é antissimétrica, então o grafo de R *não* pode ter uma aresta $\longrightarrow$ ligando dois nós e ter também uma aresta $\longleftarrow$ na direção oposta. Se uma relação R em um conjunto finito A é antissimétrica, o grafo $G[R]$ não pode apresentar uma aresta "que vai" e também uma aresta "que volta", entre o mesmo par de nós.



Aresta que vai e aresta que volta ligando o mesmo par de pontos *é proibido*, se a relação é *antissimétrica.*

Exemplo 10.1 *A relação* $R = \{(1,3),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$ *sobre* $A = \{1,2,3,4\}$ *não é antissimétrica.*

$G[R]$:



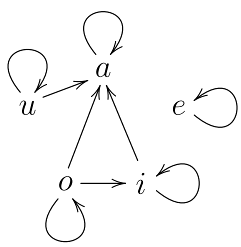
Existe uma aresta que sai do nó 3 e vai para o nó 4, e também existe uma aresta que volta do nó 4 para o nó 3.

Definição 10.2 *Seja* A *um conjunto e* $R \subseteq A \times A$*. Dizemos que* R *é uma* <u>*relação de ordem*</u> *em* A *se* R *é reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Exemplo 10.2 *Considere o conjunto finito* $A = \{a, e, i, o, u\}$*, a relação*

$$R = \{(a,a),(e,e),(i,i),(o,o),(u,u),(u,a),(o,a),(o,i),(i,a)\}$$

em A*, e o grafo* $G[R]$*:*



A relação R *é uma relação de ordem em* A*. De fato,* R *é reflexiva, pois não temos nós sem laço;* R *é antissimétrica, pois não temos arestas que vão e voltam;* R *é transitiva, pois não temos caminhos compridos sem atalho.*

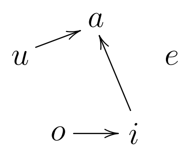
10.3 Diagrama de Hasse

Quando A é um conjunto finito, temos uma outra maneira de representar uma relação de ordem R em A por um diagrama, chamado *Diagrama de Hasse*, que considera as propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade da relação.

Como sabemos que a relação R do Exemplo 10.2 é uma relação de ordem, podemos apagar as arestas que representam informação redundante:

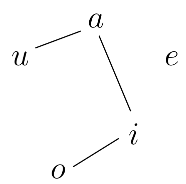
- todos os laços, pois sabemos que a relação é reflexiva;

- a aresta (atalho) $o \to a$, pois sabemos que a relação é transitiva e temos o caminho $o \to i \to a$.



Como R também é antissimétrica, sabemos que nenhuma aresta que vai tem uma correspondente voltando. Assim, se *convencionamos que as arestas apontam sempre para cima*, podemos *mudar um pouco a posição dos nós*, se necessário, e apagar também:

- as pontas de todas as arestas.



Dada uma relação de ordem R, chamamos de diagrama de Hasse de R ao diagrama obtido de $G[R]$ pelo procedimento de:

1. apagar todos os laços e todos os atalhos,
2. mudar as posições dos nós para as arestas apontarem para cima,
3. apagar as pontas das arestas.

Grafo de R:

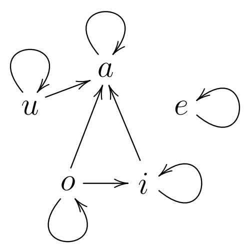
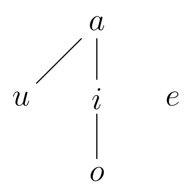


Diagrama de Hasse de R:



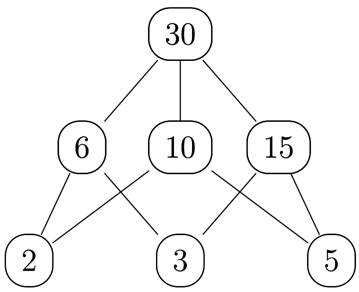
Podemos também construir o diagrama de Hasse de uma relação diretamente, sem passar pelo grafo da relação. Nesse caso, o diagrama de Hasse para uma relação R em um conjunto A é construído assim: desenhamos um ponto para cada elemento de A de modo que, quando $(x, y) \in R$ e $x \neq y$, então o ponto que representa y deve estar acima do ponto que representa x; desenhamos traços ligando os pontos x e y no desenho tais que $(x, y) \in R$ e não existe ponto $z \in A$ tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$. Assim, podemos descobrir qual é o conjunto A e qual é a relação de ordem R em A a partir de um diagrama de Hasse. Os elementos do conjunto A são os objetos representados pelos pontos do diagrama. Os pares da relação R são os pares de objetos cujos pontos estão ligados no diagrama diretamente por um traço ou por um caminho que passa por alguns outros pontos ligados por traços, junto com todos os pares de mesma coordenada. A relação de inclusão em $\mathcal{P}(\{x,y\})$, por exemplo, seria descrita assim:

$$
\begin{array}{rcll}
\subseteq & = & \{ & (\emptyset,\{x\}),(\emptyset,\{y\}), & \textit{pares de objetos} \\
& & & (\{x\},\{x,y\}),(\{y\},\{x,y\}), & \textit{ligados por um traço} \\
& & & & \\
& & & (\emptyset,\{x,y\}), & \textit{par ligado por um caminho} \\
& & & & \\
& & & (\emptyset,\emptyset),(\{x\},\{x\}), & \textit{pares de objetos} \\
& & & (\{y\},\{y\}),(\{x,y\},\{x,y\}) \quad \} & \textit{de mesma coordenada}
\end{array}
$$

Em um diagrama de Hasse, então, não temos nenhum elemento gráfico que represente os pares que sabemos que pertencem à relação de ordem por causa da reflexividade (pares de mesma coordenada) nem os pares que podemos concluir que pertencem à relação de ordem por causa da transitividade (pares ligados por caminhos que passam por um ou mais pontos intermediários). Como diagramas de Hasse são usados para representar relações de ordem, que são relações reflexivas e transitivas (além de antissimétricas), no diagrama temos uma quantidade de elementos gráficos suficientes para representar a relação com precisão, sem elementos redundantes.

Vejamos um outro exemplo de relação de ordem apresentada por um diagrama de Hasse.

Exemplo 10.3 *Considere o conjunto* $A = \{2,3,5,6,10,15,30\}$ *dos divisores de* 30 *diferentes de* 1 *e a relação* $R = \{(a,b) : a \text{ divide } b\} \subseteq A \times A$ *de divisibilidade em* A*. A seguir temos o diagrama de Hasse dessa relação:*



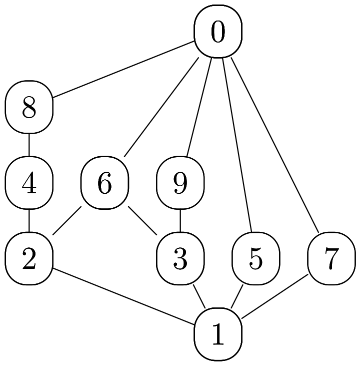
A definição da relação por listagem fica assim:

$$
\begin{array}{rcll}
R & = & \{ & (2,6),(2,10),(3,6),(3,15),(5,10), & \text{pares de objetos} \\
& & & (5,15),(6,30),(10,30),(15,30), & \text{ligados por um traço} \\
& & & & \\
& & & (2,30),(3,30),(5,30), & \text{ligados por um caminho} \\
& & & & \\
& & & (2,2),(3,3),(5,5),(6,6), & \text{pares de objetos} \\
& & & (10,10),(15,15),(30,30) \quad \} & \text{de mesma coordenada}
\end{array}
$$

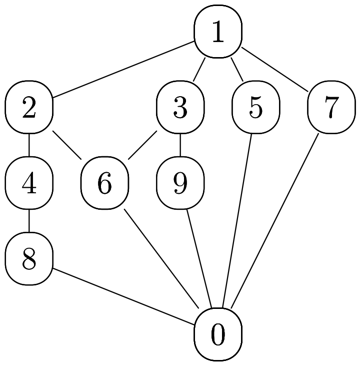
Exemplo 10.4 *Vamos considerar também a relação de divisibilidade* R *definida no conjunto dos dígitos* $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$*. Temos que:*

$$
\begin{array}{rl}
R = \{ & (0,0),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9), \\
& (2,0),(2,2),(2,4),(2,8),(3,0),(3,3),(3,6),(3,9),(4,0),(4,4),(4,8), \\
& (5,0),(5,5),(6,0),(6,6),(7,0),(7,7),(8,0),(8,8),(9,0),(9,9) \quad \}.
\end{array}
$$

O diagrama de Hasse de R é assim:



Observe que, se R é uma relação de ordem em um conjunto A, então R^{-1} também é uma relação de ordem em A. Se temos o diagrama de Hasse da relação R, basta virar o diagrama "de cabeça para baixo" para obter o diagrama de R^{-1}. No exemplo anterior vimos o diagrama de Hasse da relação R no conjunto dos dígitos tal que $(a, b) \in R$ quando a divide b. A inversa de R é obtida invertendo-se a ordem dos pares em R. Sabemos que a divide b quando b é um múltiplo de a. Assim, no exemplo anterior, como R é a relação de divisibilidade no conjunto dos dígitos, então R^{-1} é a relação de 'ser um múltiplo de' no mesmo conjunto dos dígitos. Observe o diagrama de Hasse da relação de 'ser um múltiplo de' no mesmo conjunto dos dígitos:



10.4 Ordens numéricas

Os principais exemplos de relações de ordem são as ordens numéricas: $\leq$ em $\mathbb{N}$, $\leq$ em $\mathbb{Z}$, $\leq$ em $\mathbb{Q}$, $\leq$ em $\mathbb{R}$. A seguir vamos estudar algumas propriedades que nos permitem diferenciar estas ordens.

A ordem dos naturais

Definição 10.3 *Seja A um conjunto, R uma relação de ordem em A e $a \in A$. Dizemos que a é um* <u>*primeiro elemento*</u> *de A segundo R quando, para todo $b \in A$ temos que $(a, b) \in R$.*

Usando a noção de primeiro elemento, podemos distinguir a relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{N}$ da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Sabemos que 0 é um primeiro elemento de $\mathbb{N}$ segundo $\leq$ e que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ não possuem primeiro elemento, segundo $\leq$.

Proposição 10.1 *Para todo conjunto A, toda relação de ordem R em A e todos $a, b \in A$, se a e b são primeiros elementos de A segundo R, então $a = b$.*

O primeiro elemento de um conjunto A segundo uma relação de ordem R também é chamado de elemento *mínimo* de A segundo R.

Exercício 32 – Desafio –

1. *Defina último elemento (ou elemento máximo).*
2. *Mostre que $\mathbb{N}$ não tem último elemento segundo $\leq$.*

Observe que, dado um conjunto A, uma relação de ordem R em A e um elemento a de A, se a for o primeiro elemento de A segundo R, então a será o último elemento de A segundo R^{-1}.

A ordem dos inteiros

Definição 10.4 *Seja A um conjunto e R uma relação de ordem em A. Dizemos que R é discreta em A quando para todos $a, b \in A$, temos que $\{c \in A : (a, c) \in R$ e $(c, b) \in R\}$ é finito.*

Usando a noção de discretude, podemos diferenciar a relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$ da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$. Sabemos que $\leq$ é discreta em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$ e que $\leq$ não é discreta em $\mathbb{Q}$ nem em $\mathbb{R}$.

Observe que, dado um conjunto A, uma relação de ordem R em A, se R for discreta em A, então R^{-1} também será discreta em A.

A ordem dos racionais

Definição 10.5 *Seja A um conjunto e R uma relação de ordem em A. Dizemos que R é densa em A quando para todos $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $a \neq b$, então existe $c \in A$ tal que $c \neq a$, $c \neq b$, $(a, c) \in R$ e $(c, b) \in R$.*

Ou seja, quando R é densa em A, para todos $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $a \neq b$, então o conjunto $\{c \in A : (a, c) \in R$ e $(c, b) \in R\}$ é infinito.

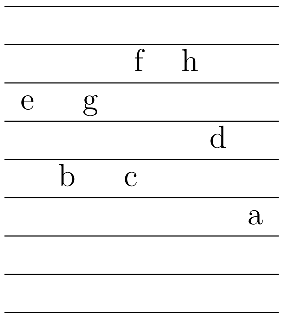
Assim como a noção de discretude, a noção de densidade também pode ser usada para diferenciar a relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$ da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$. Sabemos que $\leq$ não é densa em $\mathbb{N}$ nem em $\mathbb{Z}$ e que $\leq$ é densa em $\mathbb{Q}$ e também em $\mathbb{R}$.

Observe que, dado um conjunto A, uma relação de ordem R em A, se R for densa em A, então R^{-1} também será densa em A.

A ordem dos reais

Definição 10.6 *Seja A um conjunto, R uma relação de ordem em A e $a \in A$. Dizemos que a é um elemento minimal de A segundo R quando não existe $b \in A$ tal que $(b, a) \in R$ e $b \neq a$.*

Imagine que as faixas a seguir representam os degraus de uma escadaria e as letras representam pessoas sentadas nos degraus.



Considere a relação de ordem R no conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ das pessoas sentadas nesta escadaria tal que $(x, y) \in R$ quando a pessoa x está sentada em um degrau abaixo da pessoa y ou quando $x = y$. Neste exemplo, a pessoa a sentada no primeiro degrau ocupado da escadaria é um elemento minimal de A segundo R. No entanto, nem sempre temos um único elemento minimal.

Exercício 33 *Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ das pessoas sentadas na escadaria e a relação de ordem R em A, apresentada anteriormente, dada pela posição de cada pessoa nos degraus da escadaria.*

1. *Defina a relação de ordem R por listagem.*
2. *Identifique o primeiro elemento de A segundo R, se existir.*
3. *Identifique o último elemento de A segundo R, se existir.*

Exercício 34 – Desafio –

1. *Considere a relação de divisibilidade $|$ em $\mathbb{N}$.*
   (a) *Mostre que $|$ é relação de ordem em $\mathbb{N}$.*
   (b) *Mostre que $\mathbb{N}$ tem primeiro e último elemento segundo $|$.*
   (c) *Verifique se $|$ é densa em $\mathbb{N}$.*
2. *Defina elemento maximal.*
3. *Considere a relação de divisibilidade $|$ em $\mathbb{N} - \{0, 1\}$.*
   (a) *Mostre que $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ não tem primeiro nem último elemento segundo $|$.*
   (b) *Identifique os elementos minimais de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ segundo $|$.*
   (c) *Identifique os elementos maximais de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ segundo $|$.*

Observe que, dado um conjunto A, uma relação de ordem R em A e um elemento a de A, se a for um elemento minimal de A segundo R, então a será um elemento maximal de A segundo R^{-1}.

Definição 10.7 *Seja A um conjunto, R uma relação de ordem em A, $X \subseteq A$ e $a \in A$. Dizemos que a é uma cota inferior de X em A segundo R quando para todo $x \in X$, temos que $(a, x) \in R$.*

Definição 10.8 *Seja A um conjunto, R uma relação de ordem em A, $X \subseteq A$. Dizemos que X é cotado inferiormente em A segundo R quando existe $a \in A$, tal que a é uma cota inferior de X em A.*

Observe que o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x\}$ é cotado inferiormente em $\mathbb{Q}$ segundo $\leq$.

Definição 10.9 *Seja A um conjunto, R uma relação de ordem em A, $X \subseteq A$ tal que $X \neq \emptyset$ e $a \in A$. Dizemos que a é o <u>ínfimo</u> de X em A segundo R quando a é o último elemento do conjunto das cotas inferiores de X em A segundo R.*

Definição 10.10 *Seja A um conjunto e R uma relação de ordem em A. Dizemos que A é <u>completo</u> segundo R quando todo subconjunto de A não vazio e cotado inferiormente possui ínfimo em A, segundo R.*

O conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x\}$ não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$ segundo $\leq$. Logo, $\mathbb{Q}$ não é completo segundo a relação $\leq$. Com isso, podemos diferenciar a relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Q}$ da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{R}$ é completo segundo a relação $\leq$.

Exercício 35 – DESAFIO –

1. *Defina cota superior.*
2. *Defina conjunto cotado superiormente.*
3. *Defina supremo.*
4. *Mostre que, se A é completo segundo R, então todo subconjunto de A não vazio cotado superiormente possui supremo em A.*

Observe que, dado um conjunto A, uma relação de ordem R em A e um subconjunto X de A, se X for um cotado inferiormente em A segundo R, então X será cotado superiormente em A segundo R^{-1}. Além disso, se a for o ínfimo de X em A segundo a relação R, então a será o supremo de X em A segundo R^{-1}.

10.5 Exercícios de fixação e revisão

1. Releia este capítulo e encontre no texto exemplos de acordo com o que se pede a seguir. (Em alguns casos, o mesmo exemplo pode ser resposta de itens diferentes.)
   (a) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A finito.
   (b) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A infinito.
   (c) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A tenha primeiro elemento segundo R.
   (d) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A tenha último elemento segundo R.
   (e) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A não tenha primeiro elemento segundo R.
   (f) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A não tenha último elemento segundo R.
   (g) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A tenha pelo menos dois elementos minimais segundo R.

(h) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A tenha pelo menos dois elementos maximais segundo R.

(i) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X seja cotado inferiormente em A segundo R.

(j) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X seja cotado superiormente em A segundo R.

(k) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X não seja cotado inferiormente em A segundo R.

(l) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X não seja cotado superiormente em A segundo R.

(m) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X tenha ínfimo em A segundo R.

(n) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X tenha supremo em A segundo R.

(o) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X não tenha ínfimo em A segundo R.

(p) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A e um subconjunto X de A tal que X não tenha supremo em A segundo R.

(q) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que R seja discreta.

(r) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que R não seja discreta.

(s) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que R seja densa.

(t) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que R não seja densa.

(u) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A seja completo segundo a relação R.

(v) Uma relação de ordem R sobre um conjunto A tal que A não seja completo segundo a relação R.

2. Verdadeiro ou falso? Justifique.

   Para qualquer conjunto A e quaisquer relações R e S em A, temos que:

   (a) Se R é antissimétrica e S é antissimétrica, então $R \cap S$ é anti-simétrica.

   (b) Se R é antissimétrica e S é antissimétrica, então $R \cup S$ é antissimétrica.

   (c) Se R é antissimétrica, então R^{-1} é antissimétrica.

   (d) Se R e S são relações de ordem em A, então $R \cup S$ é uma relação de ordem em A.

   (e) Se R e S são relações de ordem em A, então $R \cap S$ é uma relação de ordem em A.

   (f) Se R e S são relações de ordem em A, então $R \circ S$ é uma relação de ordem em A.

   (g) Se R é relação de ordem em A, então R^{-1} é uma relação de ordem em A.

   (h) A relação identidade Id_A é uma relação de ordem em A.

   (i) A relação universal $A \times A$ é uma relação de ordem em A.

Capítulo 11

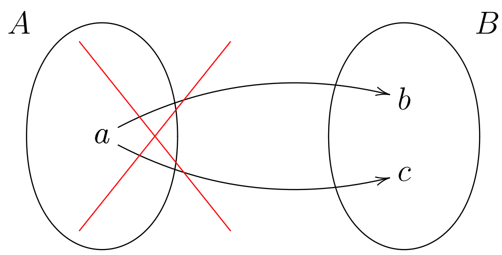
Funções

Neste capítulo, apresentamos as propriedades de funcionalidade, totalidade, injetividade e sobrejetividade de relações. Definimos funções, bijeções e a noção de cardinalidade de conjunto.

11.1 Funcionalidade, totalidade, injetividade, sobrejetividade

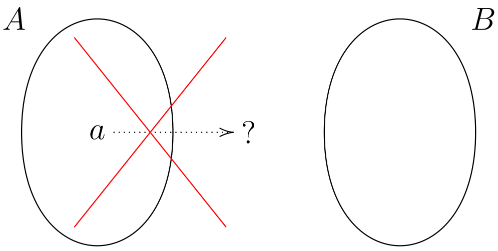
As propriedades de funcionalidade, totalidade, injetividade e sobrejetividade de relações se apresentam aos pares. Funcionalidade e totalidade são propriedades que verificamos examinando o conjunto de partida de uma relação, injetividade e sobrejetividade são verificadas focando no conjunto de chegada. Funcionalidade e injetividade são propriedades que falam da unicidade de certos objetos, totalidade e sobrejetividade, da existência. Vejamos as definições.

Definição 11.1 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é <u>funcional</u> quando, para todos $a \in A$, $b, c \in B$, se $(a, b) \in R$ e $(a, c) \in R$, então $b = c$.*



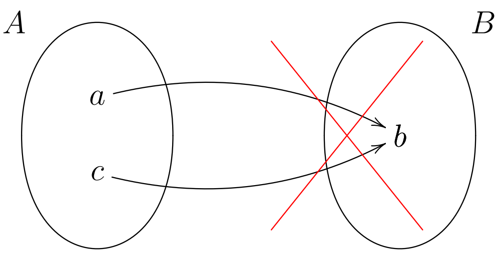
Se a relação é funcional, quando existe um elemento de B relacionado a um elemento de A, ele é único.

Definição 11.2 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é <u>total</u> quando para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.*



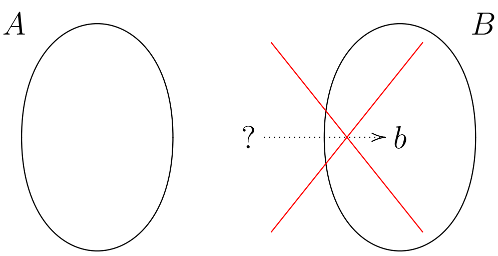
Se a relação é total, sempre existe um elemento de B relacionado a cada elemento de A.

Definição 11.3 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é <u>injetiva</u> quando para todos $a, c \in A$, $b \in B$, se $(a, b) \in R$ e $(c, b) \in R$, então $a = c$.*



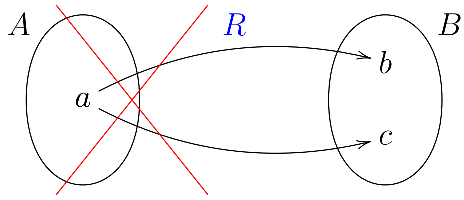
Se a relação é injetiva, quando existe um elemento de A relacionado a um elemento de B, ele é único.

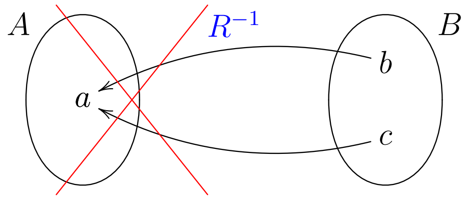
Definição 11.4 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é <u>sobrejetiva</u> quando para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$.*



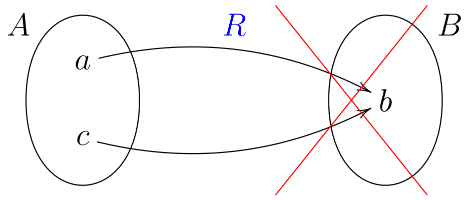
Se a relação é sobrejetiva, sempre existe um elemento de A relacionado a cada elemento de B.

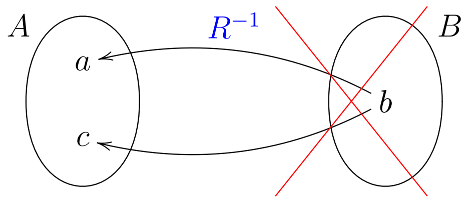
Proposição 11.1 *Para toda $R \subseteq A \times B$, temos que $R^{-1} \subseteq B \times A$ e R é funcional se, e somente se, R^{-1} é injetiva.*



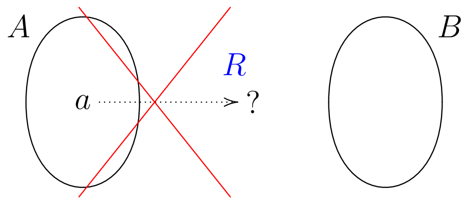


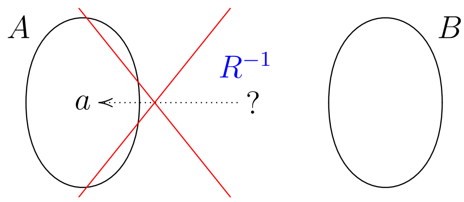
Proposição 11.2 *Para toda relação $R \subseteq A \times B$, temos que $R^{-1} \subseteq B \times A$ e R é injetiva se, e somente se, R^{-1} é funcional.*



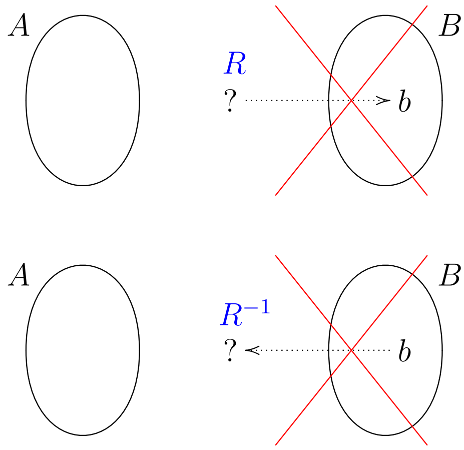


Proposição 11.3 *Para toda relação $R \subseteq A \times B$, temos que $R^{-1} \subseteq B \times A$ e R é total se, e somente se, R^{-1} é sobrejetiva.*





Proposição 11.4 *Para toda relação $R \subseteq A \times B$, temos que $R^{-1} \subseteq B \times A$ e R é sobrejetiva se, e somente se, R^{-1} é total.*



11.2 Funções

Definição 11.5 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é uma função de A em B, denotado por $R : A \to B$, quando R é funcional e total.*

Definição 11.6 *Seja f uma função de A em B. Dizemos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f.*

Quando $f : A \to B$ é uma função, para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Escrevemos, então, $f(x) = y$ para representar que $(x, y) \in f$. No caso de relações $R \subseteq A \times B$ que não são funções, dado $x \in A$, a notação $R(x)$ também é usada para representar os elementos $y \in B$ para os quais $(x, y) \in R$. Mas, nesse caso, podemos ter vários elementos de B associados a x por R, ou nenhum elemento em B associado a x por R. Por isso, $R(x)$ denota um conjunto:

$$R(x) = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

que nem sempre é unitário, podendo ser vazio ou ter vários elementos. Da mesma forma, mesmo quando $f : A \to B$ é uma função, nem sempre sua inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função. (Como vimos, isso só acontece quando f é injetiva e sobrejetiva.) Mas, dado $y \in B$, também usamos a notação $f^{-1}(y)$ para representar o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $(y, x) \in f^{-1}$, ou seja:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : (y, x) \in f^{-1}\} = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

11.3 Relações bijetivas

Definição 11.7 *Seja $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é bijetiva se for funcional, total, injetiva e sobrejetiva.*

Quando uma relação R é bijetiva, dizemos também que R é uma bijeção. Assim, as bijeções são as funções injetivas e sobrejetivas.

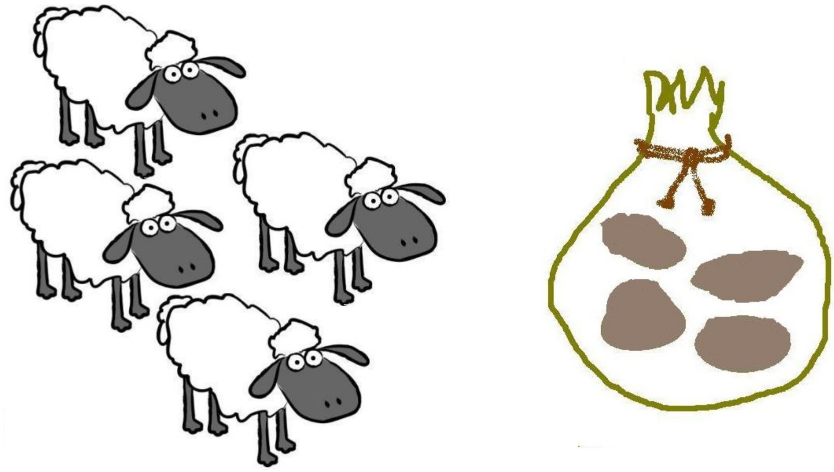
Proposição 11.5 *Para toda relação $R \subseteq A \times B$, temos que R é bijetiva se, e somente se, R satisfaz as seguintes condições:*

(a) para todo $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$, e

(b) para todo $b \in B$, existe um único $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$.

Bijeção e cardinalidade

A definição de cardinalidade, em Teoria dos Conjuntos, está baseada na mesma ideia básica que a humanidade usa desde sempre para estabelecer quantidades.



Quando o pastorzinho pré-histórico queria determinar se todas as suas ovelhas que saíram da caverna no início do dia haviam voltado no finzinho da tarde, mesmo sem saber contar nem conhecer números, ele conseguia fazer isso. O pastorzinho guardava uma certa quantidade de pedras, exatamente uma para cada ovelha. No fim do dia, colocava uma pedra na sacola para cada ovelha que entrava na caverna. Se todas as pedras fossem colocadas na sacola, ele sabia que todas as ovelhas haviam voltado. Se alguma pedra sobrasse, ele saía para procurar a ovelha perdida. O pastorzinho podia não saber nomear a quantidade de pedras ou a quantidade de ovelhas, mas sabia que ele tinha a mesma quantidade de pedras e ovelhas. Esse é essencialmente o mesmo princípio que usamos para "dizer" quantos pães queremos em uma padaria barulhenta, mostrando um certo número de dedos da mão. E é o princípio usado para definir quantidade de elementos (ou cardinalidade) de um conjunto, tanto para conjuntos finitos quanto para conjuntos infinitos.

Definição 11.8 *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que a <u>cardinalidade de A é menor ou igual à a cardinalidade de B</u> quando existe uma função injetiva de A em B.*

Definição 11.9 *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A e B <u>têm a mesma cardinalidade</u> quando existe uma bijeção de A em B.*

Talvez seja intuitivo pensar que, se temos uma função injetiva de A em B e também uma função injetiva de B em A, então teremos uma bijeção de A em B. Mas esse não é um resultado fácil de provar. O Teorema de Cantor, Bernstein e Schroeder, que enunciamos a seguir, sem apresentar a prova, garante que as definições que apresentamos para comparar cardinalidades são coerentes.

Teorema 11.1 (Cantor, Bernstein e Schroeder) *Para todos os conjuntos A e B, se A tem cardinalidade menor que a cardinalidade de B e B tem cardinalidade menor que a cardinalidade de A, então A e B têm a mesma cardinalidade.*

Definição 11.10 *Sejam A um conjunto e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que A tem cardinalidade n quando existe uma bijeção de A em $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que A é finito quando um conjunto A tem cardinalidade n, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Quando um conjunto A tem cardinalidade $n \in \mathbb{N}$, dizemos que n é o número de elementos de A.

Definição 11.11 *Seja A um conjunto. Dizemos que A é enumerável quando existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em A.*

Usamos a primeira letra do alfabeto hebraico (o alef), com subíndice zero, para representar a cardinalidade de conjuntos enumeráveis. Assim, dizemos por exemplo que $\mathbb{N}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.

Definição 11.12 *Seja A um conjunto. Dizemos que A é infinito quando existe um subconjunto B de A tal que $B \neq A$ e existe uma bijeção de A em B.*

Note que não definimos que um conjunto é *infinito* quando ele não é *finito*. Isso é verdade, mas não é um resultado que segue imediatamente das definições de conjunto finito e conjunto infinito. Nos próximos capítulos, vamos falar mais sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos e veremos, em particular, que existem conjuntos infinitos que não são enumeráveis.

11.4 Exercícios de fixação e revisão

1. Para cada relação R de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a seguir, determine se R é uma função de A em B. Justifique as respostas negativas.
   (a) $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
   (b) $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (d, 5)\}$
   (c) $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 5)\}$
   (d) $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 1)\}$
   (e) $R = \{(a, 5), (b, 5), (c, 5), (d, 5)\}$
2. Para cada relação do item anterior que não é uma função, determine se ela é uma relação funcional de A em B.
3. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Considere também as funções $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ e $g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, de A em B. Explique por que nem f^{-1} nem g^{-1} são funções de B em A.
4. Para cada relação R de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ a seguir, determine se R é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Justifique as respostas negativas.
   (a) $R = \{(a, |a|) : a \in \mathbb{Z}\}$

(b) $R = \{(|a|, a) : a \in \mathbb{Z}\}$
(c) $R = \{(a, a^2) : a \in \mathbb{Z}\}$
(d) $R = \{(a^2, a) : a \in \mathbb{Z}\}$
(e) $R = \{(a, a+1) : a \in \mathbb{Z}\}$
(f) $R = \{(a+1, a) : a \in \mathbb{Z}\}$
(g) $R = \{(2a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$

5. Para cada relação do item 4 que não é uma função, determine se ela é uma relação funcional de A em B.

6. Para cada relação do item 4 que é funcional, apresente a relação usando a notação usual para funções, isto é, "$R : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $R(x) = \ldots$" (troque as reticências pela lei de associação da relação).

7. Dentre as funções identificadas no item 4, determine as que são injetivas.

8. Dentre as funções identificadas no item 4, determine as que são sobrejetivas.

9. Verifique se as funções a seguir são injetivas e sobrejetivas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x, x+1, y)$.

10. Considere a função $f(a) = a^2$ em $\mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$, em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$. Determine em quais casos f é injetiva e em quais casos f é sobrejetiva.

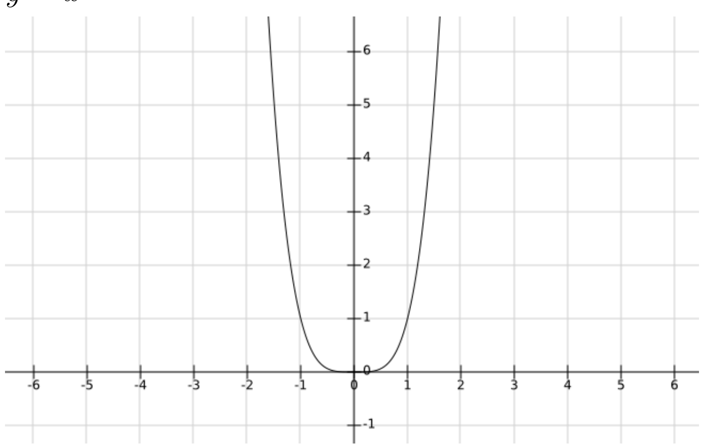
11. Encontre exemplos de funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $f \circ g \neq g \circ f$.

12. Encontre um exemplo de uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cuja inversa não é uma função.

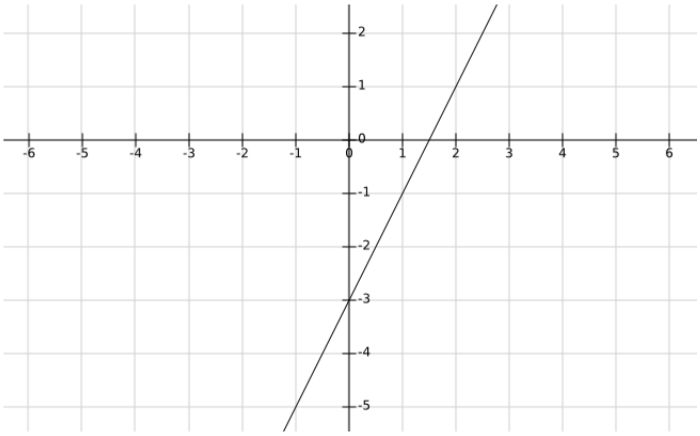
13. Encontre um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuja inversa não é uma função.

14. Para cada função a seguir, determine o domínio, a imagem e a inversa.

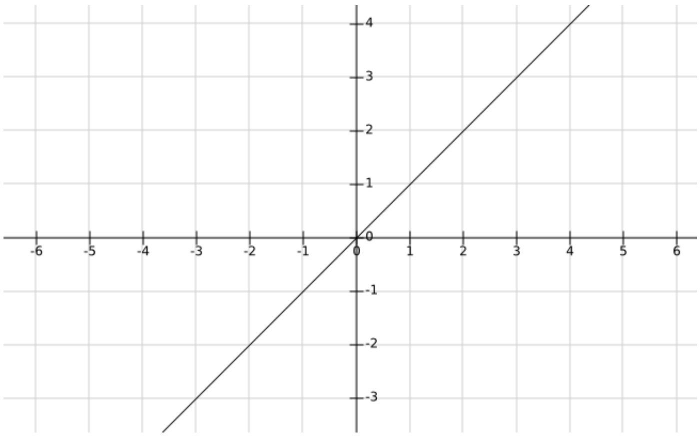
(a) $y = x^4$



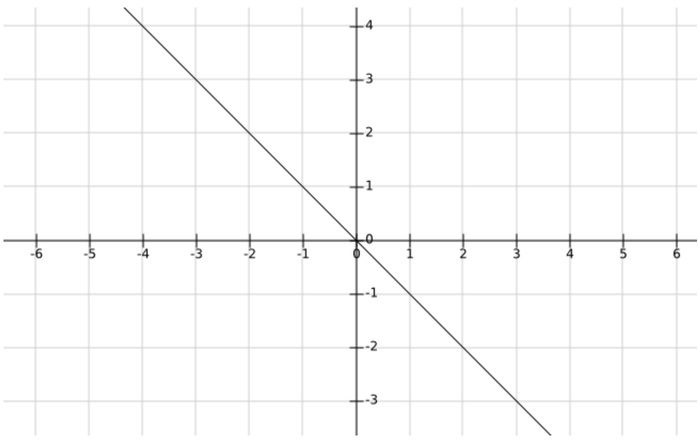
(b) $y = 2x - 3$



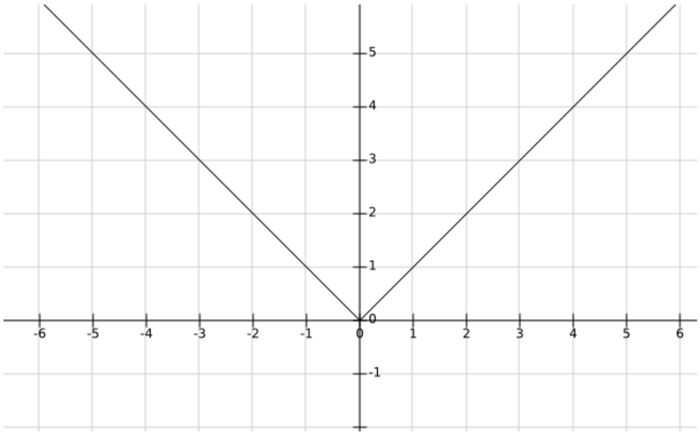
(c) $y = x$



(d) $y = -x$



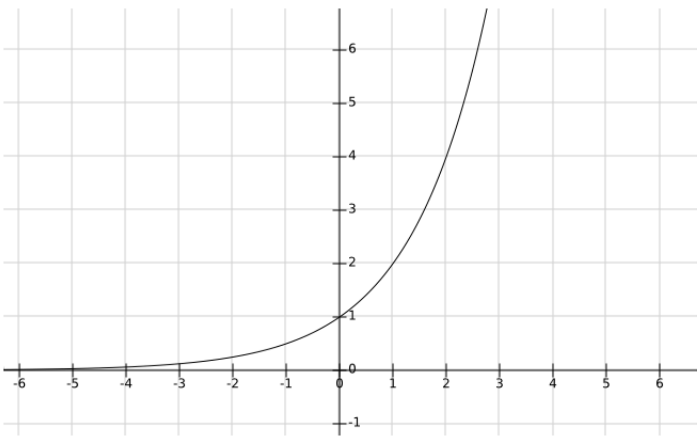
(e) $y = |x|$



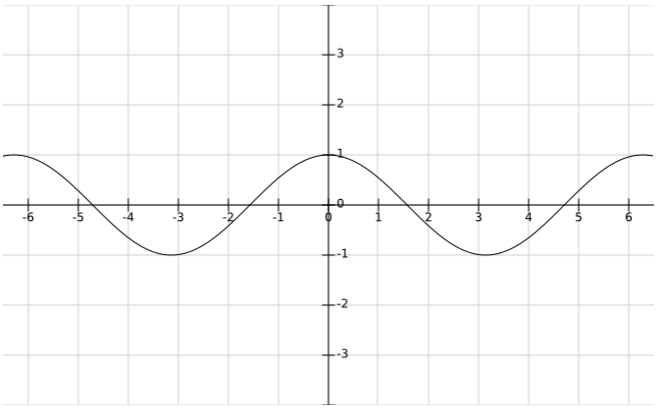
(f) $y = \mathsf{log}_2(x)$

(g) $y = \mathsf{sen}(x)$

(h) $y = 2^x$



(i) $y = \cos(x)$



15. Prove por indução que:

 (a) Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, então, para todo natural n temos que $f(x^n) = nf(x)$.

 (b) Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, então, para todo natural n temos que $f(x^n) = f(x)^n$.

 (c) Para todo real $x \neq 1$, temos que, para todo natural n:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

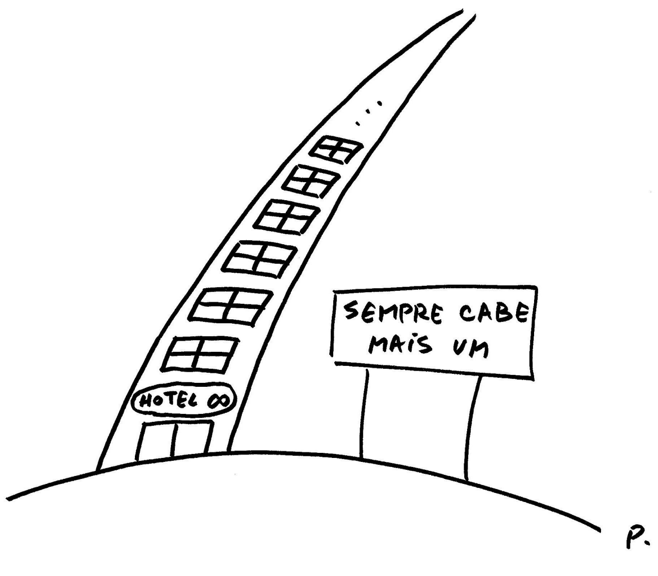
Capítulo 12

Hotel de Hilbert

Neste capítulo, usando o conceito de bijeção, discutimos a cardinalidade de alguns conjuntos numéricos infinitos, através da alegoria do Hotel de Hilbert.

12.1 Hotel de Hilbert

Longe, muito longe,
em um ponto infinitamente
distante no universo, existe um
lugar onde as pessoas convivem com o
infinito. Elas não se espantam com ele, mas
o compreendem e tiram proveito desta convi-
vência. Dentre as muitas coisas diferentes que
existem por lá, se destaca um hotel infinito,
conhecido como *Hotel de Hilbert* (HH).



Como é de se esperar, a tecnologia e a engenharia utilizadas na construção do HH são muito avançadas.

O HH é chiquérrimo:

– HH não tem elevador, mas *teletransporte instantâneo*;

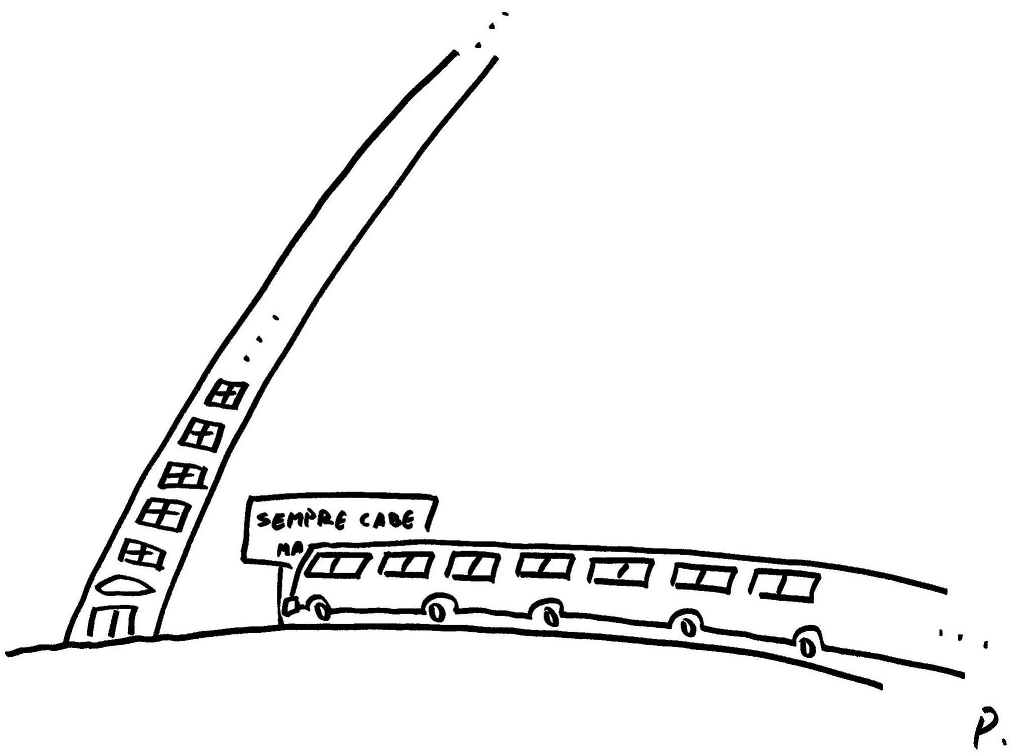
– HH possui exatamente *um quarto por andar*;

– HH possui *infinitos quartos*, numerados por números naturais não-nulos (*exatamente um quarto para cada elemento de* $\mathbb{N}^*$).

Assim, *HH não tem cobertura!*

Congresso Intergalático de Matemática

Um congresso intergalático de Matemática vai acontecer nas imediações do HH. De todos os infinitos cantos do universo infinito, chegam infinitas pessoas que fazem Matemática para se hospedar no HH.



Todas as pessoas que vão participar do congresso intergalático de Matemática chegam ao mesmo tempo, em um ônibus espacial com infinitos lugares, *exatamente um para cada elemento de* $\mathbb{N}^*$, fretado pela organização do congresso. Após a chegada do ônibus, todas as pessoas são confortavelmente instaladas em seus quartos e o HH fica lotado.

12.2 Problemas 1, 2, 3, e n

Como é de esperar, um matemático terrestre (brasileiro?) perde o ônibus e chega atrasado. Quando ele chega, após todas as outras pessoas que chegaram no ônibus do congresso já estarem hospedadas, o HH está lotado.

Como o HH é chiquérrimo, só é permitido hospedar uma pessoa em cada quarto. Será que esse atrasadinho vai ter que procurar outro hotel?

Problema 1

O HH está lotado, com uma pessoa em cada quarto. Chega mais 1 hóspede ao HH. Como o gerente poderá hospedar essa pessoa?

Solução 1. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta a pessoa que está hospedada no quarto k para o quarto $k+1$. Desta maneira, o quarto 1 fica desocupado. Assim, a pessoa recém-chegada ocupa o quarto 1. Observe que os infinitos teletransportes acima foram feitos simultaneamente, isto é, no mesmo instante, todas as pessoas mudaram de quarto, cada hóspede indo para o quarto seguinte ao que ocupava anteriormente.

hóspedes	quartos
$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$\boxed{\text{n+2}}$
n	$\boxed{\text{n+1}}$
$\vdots$	$\vdots$
3	$\boxed{4}$
2	$\boxed{3}$
1	$\boxed{2}$
b	$\boxed{1}$

A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{b\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} x+1 \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ se } x = b \end{cases}$$

O domínio da função representa as pessoas hospedadas no HH (as que chegaram no ônibus do congresso e a recém-chegada) e o contradomínio representa os quartos do HH. Como esta função s é uma bijeção, a cada hóspede (que chegou no ônibus ou que acaba de chegar) corresponde um (único) quarto e não sobra nenhum quarto desocupado.

Alguns minutos depois, chegam mais dois matemáticos terrestres (argentinos?) que também perderam o ônibus fretado do congresso. Quando eles chegam, o matemático brasileiro já está instalado e o HH está novamente lotado.

Problema 2

O HH está lotado, com uma pessoa hospedada em cada quarto. Chegam mais 2 hóspedes ao HH. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Solução 2. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta, simultaneamente para todas as pessoas hospedadas, quem ocupa o quarto k para o quarto $k+2$. Desta maneira, os quartos 1 e 2 ficam desocupados. Assim, as pessoas recém-chegadas ocupam os quartos 1 e 2.

hóspedes	quartos
$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$\boxed{\text{n+3}}$
n	$\boxed{\text{n+2}}$
$\vdots$	$\vdots$
3	$\boxed{5}$
2	$\boxed{4}$
1	$\boxed{3}$
a_2	$\boxed{2}$
a_1	$\boxed{1}$

A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{a_1, a_2\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ se } x = a_1 \\ 2 \text{ se } x = a_2 \end{cases}$$

Novamente, o domínio da função representa as pessoas hospedadas (as recém-chegadas e quem já estava lá anteriormente) e o contradomínio representa os quartos do HH. Como esta função s é uma bijeção, a cada uma das pessoas corresponde um (único) quarto e não sobra nenhum quarto desocupado.

Mais alguns minutos e chegam três matemáticos portugueses. Eles ficaram esperando o ônibus fretado do congresso no lugar errado e também acabaram perdendo o ônibus. Quando eles chegam, os matemáticos argentinos já estão instalados e o HH está novamente lotado.

Problema 3

Chegam mais 3 hóspedes ao HH lotado. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Solução 3. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta, simultaneamente para todas as pessoas hospedadas, quem ocupa o quarto k para o quarto $k+3$. Os 3 primeiros quartos ficam desocupados. As pessoas recém-chegadas ocupam os 3 primeiros quartos.

hóspedes	quartos
$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	n+4
n	n+3
$\vdots$	$\vdots$
2	5
1	4
p_3	3
p_2	2
p_1	1

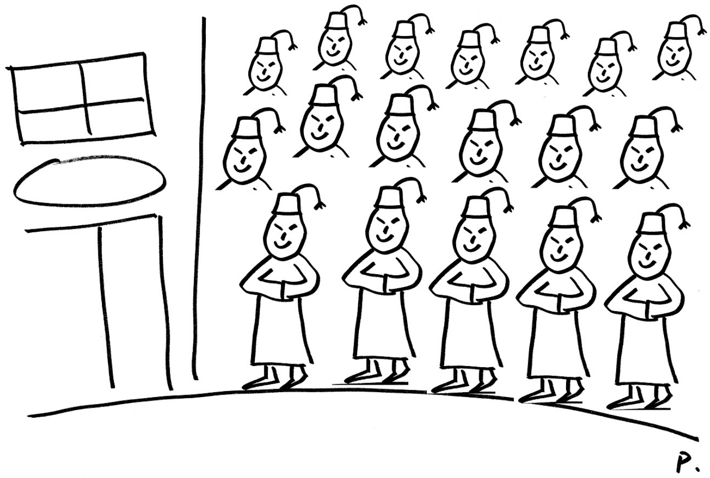
A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{p_1, p_2, p_3\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} x+3 \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ i \text{ se } x = p_i \end{cases}$$

Mais uma vez, o domínio da função representa as pessoas hospedadas e o contradomínio representa os quartos do HH. Como esta função s é uma bijeção, a cada hóspede corresponde um (único) quarto e não sobra nenhum quarto desocupado.



Ainda de manhã chegam muitas pessoas, de vários institutos de Matemáica chineses, atrasadas para o congresso. São muitas, a gerência do HH não divulgou exatamente quantas, mas é uma quantidade finita que foi denotada por n. Quando elas chegam, os matemáticos portugueses já estão instalados e o HH está novamente lotado.

Problema n

Chegam mais n hóspedes ao HH lotado. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Solução n. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta, simultaneamente para todas as pessoas hospedadas, quem ocupa o quarto k para o quarto $k+n$. Os n primeiros quartos ficam desocupados. As pessoas recém-chegadas da China ocupam os n primeiros quartos.

hóspedes	quartos
$\vdots$	$\vdots$
$m+1$	$\boxed{\text{m+1+n}}$
m	$\boxed{\text{m+n}}$
$\vdots$	$\vdots$
2	$\boxed{\text{2+n}}$
1	$\boxed{\text{1+n}}$
c_n	$\boxed{\text{n}}$
$\vdots$	$\vdots$
c_2	$\boxed{2}$
c_1	$\boxed{1}$

A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \to \mathbb{N}^*$$

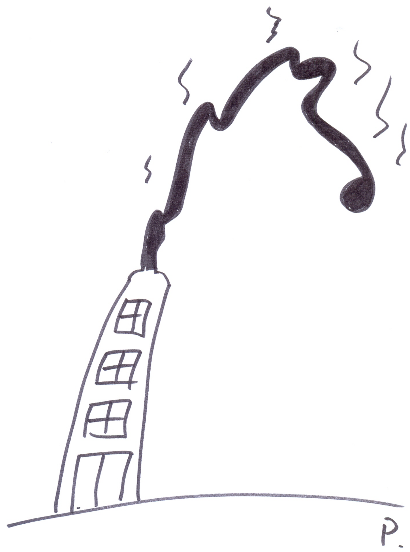
tal que

$$s(x) = \begin{cases} x+n \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ i \text{ se } x = c_i \end{cases}$$

Também nesse caso foi possível encontrar uma bijeção associando todas as pessoas (as recém-chegadas e as que já estavam hospedadas anteriormente) a quartos do HH.

12.3 Problemas ω, 2ω, 3ω, e $m\omega$

Vamos denotar por ω uma quantidade de objetos que cabe exatamente no HH, sendo exatamente um objeto em cada quarto e exatamente um quarto para cada objeto. Assim, por exemplo, a quantidade de números naturais não nulos é denotada por ω.



Na rua do HH existem muitos hotéis infinitos. O hotel infinito bem em frente ao HH também está lotado e sofre um incêndio. Os bombeiros intergaláticos são muito eficientes. E graças ao trabalho deles, todos os hóspedes do hotel que pegou fogo foram salvos. Mas o hotel ficou destruído.

Problema ω

Chega mais uma quantidade infinita de pessoas querendo se hospedar no HH lotado, uma pessoa para cada número natural não-nulo. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Par-ou-ímpar. Pensando neste problema, o gerente se lembra do jogo de par-ou-ímpar. Ele separa os quartos em dois grupos: (P) quartos cujo número dá a vitória a quem pediu par e (I) quartos cujo número dá a vitória a quem pediu ímpar.

Enquanto, do ponto de vista usual, vemos a numeração dos quartos do HH desta maneira:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\text{n+1}} \\ \boxed{\text{n}} \\ \vdots \\ \boxed{4} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{array}$$

O gerente, pensando no jogo de par-ou-ímpar, visualiza a numeração dos quartos do HH do seguinte modo:

$\vdots$	$\vdots$
2(n+1)	2(n+1)-1
2n	2n-1
$\vdots$	$\vdots$
8	7
6	5
4	3
2	1

Solução ω. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta simultaneamente a pessoa que ocupa o quarto k para o quarto $2k$. Apenas os quartos pares ficam ocupados. Todos os quartos ímpares ficam desocupados. As pessoas recém-chegadas vão ocupar os quartos ímpares.

hóspedes		quartos
		$\vdots$
		2n
		2n-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q_n	n	5
$\vdots$	$\vdots$	4
q_3	3	3
q_2	2	2
q_1	1	1

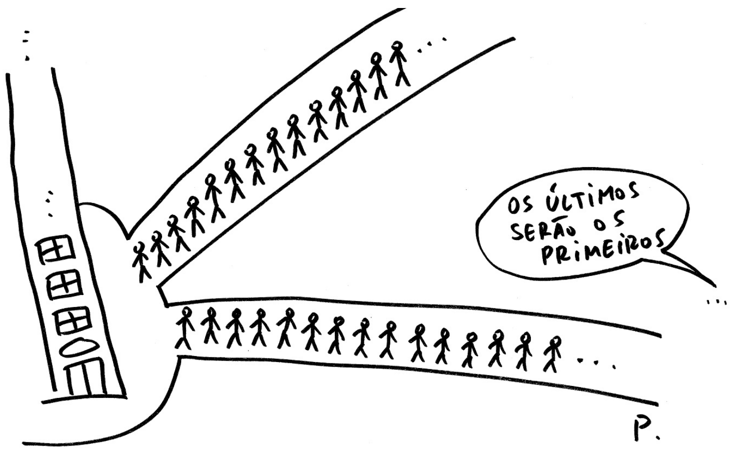
A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{q_i : i \in \mathbb{N}^*\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ 2i - 1 \text{ se } x = q_i \end{cases}$$

E ainda nesse caso temos uma bijeção associando todas as pessoas hospedadas (as recém-chegadas e as que estavam no HH anteriormente) a quartos do HH.



No dia seguinte, dois hotéis infinitos lotados na mesma rua vão à falência. Dois grupos infinitos de pessoas ficam desalojadas.

Problema 2ω

Chegam mais 2 grupos infinitos de pessoas querendo se hospedar no HH lotado, 2 pessoas para cada número natural não-nulo. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Par-ou-ímpar-de-três. Pensando neste problema, o gerente se lembra do jogo de par-ou-ímpar-de-três. Naquele ponto distante do universo, quando três crianças precisam decidir quem começa uma brincadeira, elas não tiram zerinho-ou-um. Elas jogam *par-ou-ímpar-de-três*. Neste jogo, cada criança, ao invés de escolher *par* ou *ímpar*, escolhe um resto na divisão por três: *zero*, *um* ou *dois*. Depois fazem a dedanha, somam os números e se o valor obtido for um múltiplo de três (resto 0 na divisão por três), ganha quem escolheu *zero*, se o valor obtido der resto 1 na divisão por três, ganha quem escolheu *um*, se o valor obtido der resto 2 na divisão por três, ganha quem escolheu *dois*.

O gerente, pensando no jogo de par-ou-ímpar-de-três, visualiza a numeração dos quartos do HH assim:

⋮	⋮	⋮
3(n+1)	3(n+1)-1	3(n+1)-2
3n	3n-1	3n-2
⋮	⋮	⋮
9	8	7
6	5	4
3	2	1

Solução 2ω**.** Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta simultaneamente a pessoa que ocupa o quarto k para o quarto $3k$. Apenas os quartos numerados por múltiplos de 3 ficam ocupados. Todos os quartos numerados por números das formas $3k-1$ e $3k-2$ ficam desocupados. As pessoas recém-chegadas do grupo 1 ocupam os quartos numerados por naturais da forma $3k-1$. As pessoas recém-chegadas do grupo 2 ocupam os quartos numerados por naturais da forma $3k-2$.

hóspedes			quartos
			⋮
			3n
			3n-1
			3n-2
⋮	⋮	⋮	⋮
f_1^n	f_2^n	n	5
⋮	⋮	⋮	4
f_1^3	f_2^3	3	3
f_1^2	f_2^2	2	2
f_1^1	f_2^1	1	1

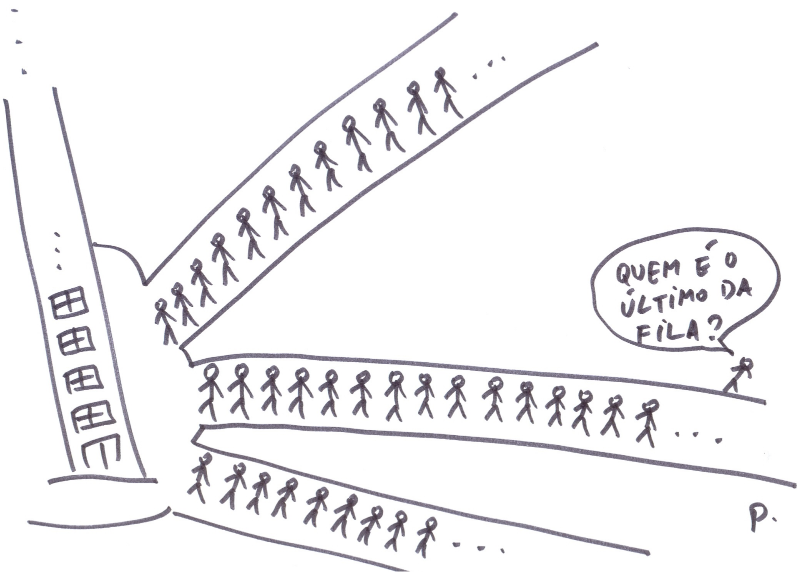
A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{f_1^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{f_2^i : i \in \mathbb{N}^*\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} 3x \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ 3i-2 \text{ se } x = f_1^i \\ 3i-1 \text{ se } x = f_2^i \end{cases}$$

Temos uma bijeção associando todas as pessoas hospedadas (recém-chegadas e as que já estavam no HH) a quartos do HH.



Por volta de meio-dia, é deflagrada uma greve de funcionários em três hotéis infinitos, de uma mesma rede, que estavam lotados. Três grupos infinitos de pessoas ficam desalojadas.

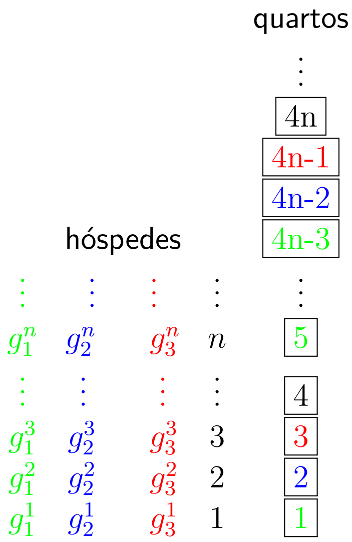
Problema 3ω

Chegam mais 3 grupos infinitos de pessoas querendo se hospedar no HH lotado, 3 pessoas para cada número natural não-nulo. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Par-ou-ímpar-de-quatro. O gerente, pensando no jogo de par-ou-ímpar-de-quatro, visualiza a numeração dos quartos do HH assim:

⋮	⋮	⋮	⋮
4(n+1)	4(n+1)-1	4(n+1)-2	4(n+1)-3
4n	4n-1	4n-2	4n-3
⋮	⋮	⋮	⋮
16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Solução 3ω**.** Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta simultaneamente quem ocupa o quarto k para o quarto $4k$. Apenas os quartos numerados por múltiplos de 4 ficam ocupados. Os quartos numerados por números das formas $4k-1$, $4k-2$ e $4k-3$ ficam desocupados. As pessoas recém-chegadas do grupo 1 ocupam os quartos numerados por números da forma $4k-1$. As pessoas recém-chegadas do grupo 2 ocupam os quartos numerados por números da forma $4k-2$. As pessoas recém-chegadas do grupo 3 ocupam os quartos numerados por números da forma $4k-3$.



A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função s do conjunto

$$\mathbb{N}^* \cup \{g_1^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{g_2^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{g_3^i : i \in \mathbb{N}^*\}$$

em $\mathbb{N}^*$ tal que

$$s(x) = \begin{cases} 4x \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ 4j - i \text{ se } x = g_j^i \end{cases}$$

Temos uma bijeção associando todas as pessoas hospedadas agora (tanto as recém-chegadas quanto as que já estavam no hotel) a quartos do HH.

Terremoto

As coisas não andam bem naquela parte remota da galáxia... Logo depois, um terremoto destrói alguns hotéis infinitos, lotados, de uma das infinitas ruas paralelas. A defesa civil é muito eficiente e, graças ao trabalho dela, todas as pessoas foram resgatadas ilesas. Mas ainda não foi divulgado o número exato de hotéis atingidos. Sabe-se apenas que foi um número finito de hotéis, que podemos denotar por m. Assim, m grupos infinitos de pessoas ficam desalojadas.

Vamos denotar por $m\omega$ a quantidade de objetos em um grupo de objetos que está dividido em exatamente m categorias, de maneira que em cada uma destas categorias existem exatamente ω objetos. Assim, por exemplo, a quantidade de pessoas desalojadas pelo terremoto é $m\omega$.

Problema $m\omega$
Chegam m grupos infinitos de pessoas querendo se hospedar no HH lotado, m pessoas para cada número natural não-nulo. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Par-ou-ímpar-de-muitos. O gerente, pensando no jogo de par-ou-ímpar-de-muitos, visualiza a numeração dos quartos do HH assim:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
nm+n	nm+n-1	⋯	nm-m+n+2	nm-m+n+1	nm-m+n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4m+4	4m+3	⋯	3m+6	3m+5	3m+4
3m+3	3m+2	⋯	2m+5	2m+4	2m+3
2m+2	2m+1	⋯	m+4	m+3	m+2
m+1	m	⋯	3	2	1

Solução $m\omega$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta, simultaneamente para todas as pessoas, quem ocupa o quarto k para o quarto $(m+1)k$. Apenas os quartos numerados por múltiplos de $m+1$ ficam ocupados. Os quartos numerados por naturais das formas

$$\underbrace{(m+1)k-1, (m+1)k-2, (m+1)k-3, \dots, (m+1)k-m}_{m \text{ formas}}$$

ficam desocupados. Para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, os novos hóspedes do grupo i ocupam os quartos numerados por naturais da forma $(m+1)k - i$.

hóspedes						quartos
						⋮
						(m+1)n
						⋮
						(m+1)n-(m-2)
						(m+1)n-(m-1)
						(m+1)n-m
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
t_n^1	t_n^2	t_n^3		t_n^m	n	m
⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮
t_3^1	t_3^2	t_3^3		t_3^m	3	3
t_2^1	t_2^2	t_2^3		t_2^m	2	2
t_1^1	t_1^2	t_1^3		t_1^m	1	1

A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{t_j^1 : j \in \mathbb{N}^*\} \cup \{t_j^2 : j \in \mathbb{N}^*\} \cup \{t_j^3 : j \in \mathbb{N}^*\} \cup \cdots \cup \{t_j^m : j \in \mathbb{N}^*\} \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} (m+1)x \text{ se } x \in \mathbb{N}^* \\ (m+1)i - j \text{ se } x = t_j^i \end{cases}$$

com $1 \leq i \leq m$ e $j \in \mathbb{N}^*$.

12.4 Problemas ω^2, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$

Maremoto

Para piorar a situação... à tarde, um maremoto destrói todos os infinitos hotéis infinitos da infinita avenida da infinita beira-mar de hotéis. Assim, infinitos grupos infinitos de pessoas ficam desalojadas.

Vamos denotar por $\omega \times \omega = \omega^2$ a quantidade de objetos em um grupo de objetos que está dividido em exatamente ω categorias, de maneira que em cada uma destas categorias existem exatamente ω objetos. Assim, por exemplo, a quantidade de pessoas desalojadas pelo maremoto é ω^2.

Problema ω^2

Chegam mais infinitos grupos infinitos de pessoas querendo se hospedar no HH lotado, um grupo para cada número natural não-nulo, cada grupo contendo uma pessoa para cada número natural não-nulo. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

É aqui que o gerente se lembra do que aprendeu na escola sobre os números primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ Ele aprendeu que:

– Um número natural é primo se, e somente se, ele possui exatamente dois divisores.

– Assim, o número 1 não é primo.

– Existem infinitos números primos.

– Para cada natural $n \geq 1$, existe um primo p_n que lhe corresponde.

– Cada natural maior do que 1 pode ser escrito como um produto de fatores primos.

– Se ordenamos os fatores em ordem não decrescente, este produto é univocamente determinado.

Para cada natural $n \geq 1$ existem únicos

$$k, p_1, p_2, \ldots, p_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

tais que $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são números naturais, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos, $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ e

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Como o gerente do HH gosta muito de Aritmética, seu conhecimento sobre números naturais não se resume apenas aos números primos. Ele também estudou a relação de divisibilidade e aprendeu que, sobre os números naturais, está definida uma relação de divisibilidade, denotada por uma barra vertical $|$. Dados m e n, números naturais, temos que $m|n$ se, e somente se, existe k tal que $n = mk$. Ou seja, $m|n$ significa que quando dividimos n por m, encontramos resto igual a zero. A relação de divisibilidade tem as seguintes propriedades:

– é reflexiva, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $n|n$.

– é antissimétrica, isto é, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, se $m|n$ e $n|m$, então $m = n$.

– é transitiva, isto é, para todos $m, n, k \in \mathbb{N}$, se $m|n$ e $n|k$, então $m|k$.

A relação $\leq$ de ordem sobre números naturais tem propriedades análogas a essas. Outra semelhança entre $\leq$ e $|$ é a seguinte:

– Se $m \leq n$, então existe apenas uma quantidade finita de números k tais que $m \leq k$ e $k \leq n$.

– Se $m|n$, então existe apenas uma quantidade finita de números k tais que $m|k$ e $k|n$.

Uma grande diferença entre $\leq$ e $|$ é a seguinte:

– Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, ou $m \leq n$ ou $n \leq m$.

– Mas existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que m não divide n e n não divide m. Por exemplo, 2 não divide 3 e 3 não divide 2.

Assim, enquanto, do ponto de vista usual, vemos a numeração dos quartos do HH desta maneira:

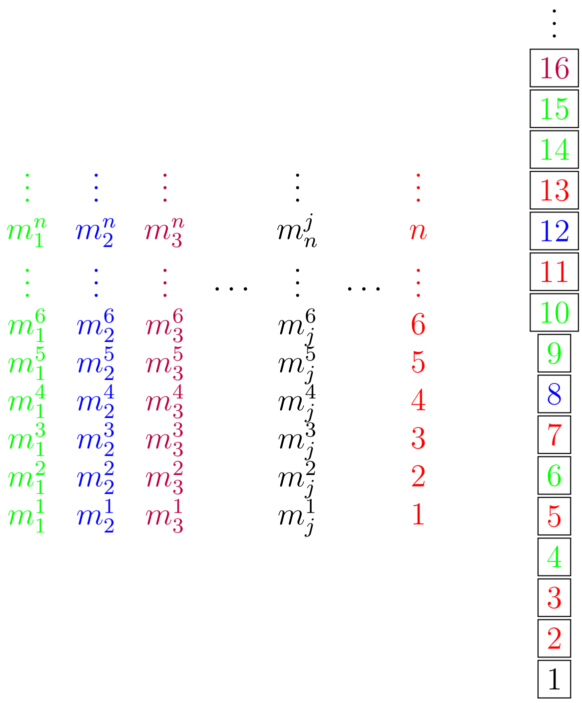
$$\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\text{n+1}} \\ \boxed{\text{n}} \\ \vdots \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{array}$$

O gerente, pensando na relação de divisibilidade e nos números primos, visualiza a numeração dos quartos do HH assim:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \vdots & & & & & \\
\boxed{2^i} & \boxed{2^{i-1}3^1} & \cdots & \multicolumn{4}{c}{\boxed{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots\ p_k^{\alpha_k}}\ {\scriptstyle(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=i)}} & & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
\boxed{16} & \boxed{24} & \boxed{36} & \boxed{40} & \boxed{54} & \boxed{56} & \boxed{60} & \boxed{80} & \boxed{81} & \cdots \\
\boxed{8} & \boxed{12} & \boxed{18} & \boxed{20} & \boxed{27} & \boxed{28} & \boxed{30} & \boxed{42} & \boxed{44} & \cdots \\
\boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{10} & \boxed{14} & \boxed{15} & \boxed{21} & \boxed{22} & \boxed{25} & \cdots \\
\boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{7} & \boxed{11} & \boxed{13} & \boxed{17} & \boxed{19} & \boxed{23} & \cdots \\
 & & & & \boxed{1} & & & & &
\end{array}$$

No i-ésimo nível ($i \geq 2$), temos produtos $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ de i primos, com repetição, ou seja, $i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$.

Solução ω^2. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o gerente teletransporta, simultaneamente para todas as pessoas hospedadas, quem ocupa o quarto k para o quarto identificado pelo k-ésimo número primo. Apenas os quartos identificados por números primos ficam ocupados. Os quartos identificados por números compostos ficam desocupados. Para cada $j \in \mathbb{N}^*$, as pessoas recém-chegadas do grupo j ocupam os quartos identificados por produtos de $j+1$ números primos.



A solução apresentada pelo gerente pode ser representada pela função

$$s : \mathbb{N}^* \cup \{m_1^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{m_2^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \cdots \cup \{m_j^i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \cdots \to \mathbb{N}^*$$

tal que

$$s(x) = \begin{cases} x\text{-ésimo número primo, se } x \in \mathbb{N}^* \\ j\text{-ésimo produto de } i+1 \text{ números primos, se } x = m_j^i \end{cases}$$

Exercício 36 *Essa solução apresentada pelo gerente não é muito eficiente, pois um dos quartos fica desocupado.*

(a) Identifique qual quarto ficou desocupado.

(b) Encontre uma solução mais eficiente, ou seja, uma cujo resultado corresponda a 100% de ocupação do HH.

O congresso intergalático de Matemática finalmente termina e, no dia seguinte, todos os quartos do HH estão livres. Mas isso não significa que o gerente do HH terá um dia de folga. O metrô espacial daquela parte da galáxia possui trens infinitos, com um assento para cada número inteiro. Naquele mesmo dia, logo no início da tarde, chega um trem de metrô espacial infinito, lotado de pessoas querendo se hospedar no HH.

Problema $\mathbb{Z}$

Chega um grupo infinito de pessoas querendo se hospedar no HH completamente desocupado, uma pessoar para cada número inteiro. Como o gerente poderá hospedar essas pessoas?

Solução $\mathbb{Z}$. Todos os quartos estão desocupados. A pessoa que estava no assento de número zero do trem ocupa o quarto de número 1. As pessoas que estavam nos assentos identificados por números inteiros positivos ocupam os quartos identificados por números pares. As pessoas que estavam nos assentos identificados por números inteiros negativos ocupam os quartos identificados por números ímpares maiores que 1.

			quartos
			⋮
hóspedes			$\boxed{2n}$
			$\boxed{2n+1}$
⋮		⋮	⋮
$-n$		n	$\boxed{5}$
⋮		⋮	$\boxed{4}$
-3		3	$\boxed{3}$
-2		2	$\boxed{2}$
-1	0	1	$\boxed{1}$

Exercício 37 *Defina a bijeção que representa a solução apresentada pelo gerente para o Problema* $\mathbb{Z}$.

As empresas de engenharia daquela parte da galáxia investem pesado em pesquisa que desenvolve a tecnologia avançadíssima que temos por lá.

Prevendo os problemas de trânsito que podem surgir no futuro, estão desenvolvendo um novo trem para o metrô. Esta nova tecnologia utiliza um processo de miniaturização, que permite construir trens que possuem um assento entre cada par de assentos dados. Um desses trens, que possui um assento para cada número racional, está em fase de teses mas, estando lotado, apresenta um defeito ao parar na estação bem em frente ao HH, em um dos raríssimos dias em que o HH estava completamente desocupado. Nem na baixa temporada o gerente do HH pode descansar.

Problema $\mathbb{Q}$

Chega um grupo infinito de pessoas querendo se hospedar no HH completamente desocupado, contendo uma pessoa para cada número racional. Como o gerente poderá hospedar essas pesssoas?

Solução $\mathbb{Q}$. O HH está completamente desocupado.

- *A pessoa que viajou no assento zero ocupa o quarto* 1.

Podemos considerar que cada racional não-nulo é da forma $\frac{p}{q}$*, onde* $\frac{p}{q}$ *é uma fração irredutível* ($p \neq 0$ *e* $q > 0$).

Assim, para cada racional não-nulo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

- *se* $p > 0$*, então a pessoa que viajou no assento* $\frac{p}{q}$ *ocupa o quarto identificado pelo* $2p$*-ésimo produto de* q *números primos;*

- *se* $p < 0$*, então a pessoa que viajou no assento* $\frac{p}{q}$ *ocupa o quarto identificado pelo* $(-2p-1)$*-ésimo produto de* q *números primos.*

Exercício 38 *1. Defina a função que representa a solução apresentada pelo gerente para o Problema* $\mathbb{Q}$.

2. *Observe que, novamente, o gerente do HH não foi muito eficiente. Alguns quartos ficaram desocupados. Identifique quais quartos ficaram desocupados.*

3. *Usando o processo de miniaturização, as empresas de tecnologia poderiam ser ainda mais eficientes no aproveitamento de espaço, desenvolvendo um trem de metrô de comprimento finito, mas ainda com um assento para cada número racional. Para ilustrar essa ideia, encontre uma bijeção entre* $\mathbb{Q}$ *e o conjunto dos números racionais entre* -1 *e* 1.

12.5 Problema $\mathbb{R}$

O projeto de pesquisa de um conceituado grupo de cientistas propõe desenvolver um trem de metrô com um assento para cada número real.

O objetivo é minimizar o custo com matéria prima, maximizando o aproveitamento do espaço, já que os trens com um assento para cada número racional possuem espaços vagos, correspondentes aos números irracionais.

Questão $\mathbb{R}$

Se chegasse um grupo infinito de pessoas ao HH completamente desocupado, contendo um pessoa para cada número real, o gerente poderia hospedar todas essas pessoas?

Resposta

Não!

Diagonal de Cantor

Antes de apresentar o Argumento da Diagonal de Cantor e resolver (negativamente) o Problema $\mathbb{R}$, vamos fazer algumas considerações sobre os conjuntos numéricos.

Números naturais. Um número é natural se, e somente se, ele pode ser representado por uma sequência finita de dígitos que não começa com 0.

Números inteiros. Um número é inteiro se, e somente se, ele pode ser representado por uma sequência finita que consiste de duas partes:

- um dos sinais $+$ ou $-$
- uma sequência finita de dígitos que não começa com 0

Números racionais. Um número é racional se, e somente se, ele pode ser representado por uma sequência finita que consiste de quatro partes:

- um dos sinais $+$ ou $-$
- 0 ou uma sequência finita de dígitos que não começa por 0
- uma vírgula ,
- uma sequência infinita de dígitos formada de um dos dois modos seguintes:
  - uma sequência finita de dígitos seguida de 0's
  - uma sequência finita de dígitos que se repete indefinidamente

Números reais. Um número é real se, e somente se, ele pode ser representado por uma sequência finita que consiste de quatro partes:

- um dos sinais $+$ ou $-$
- 0 ou uma sequência finita de dígitos que não começa por 0
- uma vírgula ,
- uma sequência infinita de dígitos que *não* termina em uma sequência infinita de 0's

O intervalo $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Um número real está entre 0 e 1 se, e somente se, ele é uma sequência infinita de dígitos que

- começa com um sinal $+$
- seguido de uma ocorrência de 0
- seguida de uma vírgula ,
- uma sequência infinita de dígitos que *não* termina em uma sequência infinita de 0's e não é a sequência com todos os dígitos iguais a 9.[1]

[1] Pois $0,99999...$ representaria o número 1.

A estratégia do argumento da diagonal que vamos apresentar se baseia também no seguinte fato:

> se $A \subseteq B$ e não há quartos no HH suficientes para alojar todas as pessoas do conjunto A, então também não há quartos suficientes no HH para alojar todas as pessoas do conjunto B.

A estratégia do gerente do HH é provar que, se temos tantas pessoas querendo se hospedar no HH quantos números reais no intervalo $(0,1)$, então não há quartos no HH suficientes para alojar todas essas pessoas. Assim, como $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$, o gerente pode concluir que, se temos tantas pessoas quantos números reais, não é possível hospedar no HH todas essas pessoass.

Solução (negativa) $\mathbb{R}$. Considere um grupo de pessoas querendo se hospedar no HH, identificadas pelos números reais no intervalo $(0,1)$. Imagine que o gerente pensou ter alojado todas essas pessoas no HH, como segue:

$$\begin{array}{cclc}
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{Quarto } k & - & \text{Hóspede} & 0, d_{k1}\ d_{k2}\ d_{k3}\ d_{k4} \cdots d_{kk}\ d_{k(k+1)} \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{Quarto } 4 & - & \text{Hóspede} & 0, d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44} \cdots d_{4k}\ d_{4(k+1)} \cdots \\
\text{Quarto } 3 & - & \text{Hóspede} & 0, d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34} \cdots d_{3k}\ d_{3(k+1)} \cdots \\
\text{Quarto } 2 & - & \text{Hóspede} & 0, d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24} \cdots d_{2k}\ d_{2(k+1)} \cdots \\
\text{Quarto } 1 & - & \text{Hóspede} & 0, d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14} \cdots d_{1k}\ d_{1(k+1)} \cdots
\end{array}$$

Podemos mostrar que o gerente se enganou, pois podemos identificar uma pessoa

$$0, d'_{11} d'_{22} d'_{33} d'_{44} \cdots d'_{kk} \cdots$$

que não está em nenhum dos quartos. Basta definir o dígito d' como segue:

$$d' = \begin{cases} 0 & \text{se } d = 9 \\ d+1 & \text{se } d \neq 9 \end{cases}$$

■

12.6 Exercícios de fixação e revisão

1. Prove que o conjunto $M(3) = \{a \in \mathbb{N} : a = 3b, \text{ com } b \in \mathbb{N}\}$ dos múltiplos de 3 é um conjunto enumerável.
2. Prove que o conjunto $I = \{a \in \mathbb{N} : a = 2b + 1, \text{ com } b \in \mathbb{N}\}$ dos números ímpares é um conjunto enumerável.
3. Prove que o conjunto $P = \{a \in \mathbb{N} : a = 2b, \text{ com } b \in \mathbb{N}\}$ dos números pares é um conjunto infinito.
4. Prove que o conjunto $M(4) = \{a \in \mathbb{N} : a = 4b, \text{ com } b \in \mathbb{N}\}$ dos múltiplos de 4 é um conjunto infinito.

5. Se A e B são conjuntos infinitos e existe uma função injetiva de A em B e A não é enumerável, então B também não é enumerável. Usando esse fato, prove que:
   (a) O conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ não é enumerável.
   (b) O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos não é enumerável.
6. Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é um conjunto enumerável. Usando esse fato, prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

   Dica: lembre que $\mathbb{R}$ é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e use o Método de Redução ao Absurdo.

Capítulo 13

Teorema de Cantor

Neste capítulo, apresentamos a prova do Teorema de Cantor, que diz que a cardinalidade do conjunto das partes de qualquer conjunto é estritamente maior que a cardinalidade do próprio conjunto. Informalmente, podemos dizer que o conjunto das partes de qualquer conjunto tem "mais elementos" que o próprio conjunto.

*

Foi na prova desse resultado que Cantor usou o hoje chamado *Argumento da Diagonal*, que nós já usamos, no Capítulo 12, para resolver o Problema $\mathbb{R}$ (página 144). Esse argumento usa um raciocínio por redução ao absurdo. No caso do Teorema de Cantor, supondo que existe uma correspondência um a um entre os elementos de um conjunto A e os seus subconjuntos, ou seja, uma bijeção de A em $\mathcal{P}(A)$, chegamos a um absurdo construindo um subconjunto D de A que não está na imagem da bijeção.

Vamos começar examinando essa construção no caso de conjuntos finitos. Trabalhando com conjuntos finitos, podemos montar tabelas e visualizar a *diagonal* que dá nome à construção (e ao argumento que usa essa construção).

Vejamos um primeiro exemplo.

Exemplo 13.1 *Consideremos o conjunto* $A = \{a, e, i, o, u\}$ *das vogais. Para definir um subconjunto de* A*, devemos decidir, para cada elemento de* A*, se esse elemento vai fazer parte do subconjunto que queremos definir, ou não. Podemos fazer isso marcando, em uma tabela,* sim *ou* não *para cada elemento de* A*. Os elementos marcados com* sim *vão fazer parte do subconjunto definido, os marcados com* não*, não. Podemos descrever essa maneira de definir o subconjunto* $\{a, e, u\}$ *como segue:*

$A = \{$	$a\,,$	$e\,,$	$i\,,$	$o\,,$	u	$\}$	subconjunto
	sim	sim	não	não	sim		$\{a, e, u\}$

Vejamos mais alguns exemplos:

$A = \{$	$a\,,$	$e\,,$	$i\,,$	$o\,,$	u	$\}$	subconjunto
	sim	sim	não	não	sim		$\{a, e, u\}$
	não	sim	não	não	não		$\{e\}$
	não	não	não	sim	sim		$\{o, u\}$
	não	não	não	não	não		$\emptyset$
	sim	sim	sim	sim	sim		$\{a, e, i, o, u\}$

Agora vamos definir um subconjunto que não está nesta tabela, usando a diagonal de sim*'s e* não*'s.*

$A = \{$	a ,	e ,	i ,	o ,	u	$\}$	subconjunto
	sim	sim	não	não	$\boxed{\text{sim}}$		$\{a, e, u\}$
	não	sim	não	$\boxed{\text{não}}$	não		$\{e\}$
	não	não	$\boxed{\text{não}}$	sim	sim		$\{o, u\}$
	não	$\boxed{\text{não}}$	não	não	não		$\emptyset$
	$\boxed{\text{sim}}$	sim	sim	sim	sim		$\{a, e, i, o, u\}$

Acrescentamos uma nova linha na tabela, construída a partir da diagonal, trocando cada sim *da diagonal por* não*, e vice-versa. Com essa construção vamos obter um subconjunto de A que, com certeza, não estava na tabela.*

$A = \{$	a ,	e ,	i ,	o ,	u	$\}$	subconjunto
	sim	sim	não	não	$\boxed{\text{sim}}$		$\{a, e, u\}$
	não	sim	não	$\boxed{\text{não}}$	não		$\{e\}$
	não	não	$\boxed{\text{não}}$	sim	sim		$\{o, u\}$
	não	$\boxed{\text{não}}$	não	não	não		$\emptyset$
	$\boxed{\text{sim}}$	sim	sim	sim	sim		$\{a, e, i, o, u\}$
	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{não}}$		$\{e, i, o\}$

Para que tenhamos uma diagonal, precisamos de uma tabela quadrada. Vamos, então, considerar que temos um subconjunto de A associado a cada elemento de A, por uma função f, e vamos definir o "subconjunto diferente" para f.

Definição 13.1 *Seja A um conjunto e $f : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função que associa elementos de A a subconjuntos de A. O subconjunto diferente para f é $D_f = \{a \in A : a \notin f(a)\}$.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 13.2 *Considere novamente o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ das vogais e a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que $f(a) = \{a, e, i, o, u\}$, $f(e) = \emptyset$, $f(i) = \{o, u\}$, $f(o) = \{e\}$, e $f(u) = \{a, e, u\}$. Nesse exemplo, o subconjunto diferente para f é $D_f = \{e, i, o\}$.*

x	a	e	i	o	u	$f(x)$
u	sim	sim	não	não	$\boxed{\text{sim}}$	$\{a, e, u\}$
o	não	sim	não	$\boxed{\text{não}}$	não	$\{e\}$
i	não	não	$\boxed{\text{não}}$	sim	sim	$\{o, u\}$
e	não	$\boxed{\text{não}}$	não	não	não	$\emptyset$
a	$\boxed{\text{sim}}$	sim	sim	sim	sim	$\{a, e, i, o, u\}$
	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{não}}$	$D_f = \{e, i, o\}$

Exercício 39 *Dado o conjunto A dos principais personagens da sua série ou do seu livro favorito, defina a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ que associa, a cada personagem, o conjunto de todos os personagens cujo nome tem a mesma inicial. Por exemplo, se alguém considera que*

$$A = \{\text{Burman}, \text{Saru}, \text{Tyler}, \text{Stamets}, \text{Tilly}, \text{Lorca}, \text{Culber}, \text{Pike}, \text{Booker}, \text{Georgio}\}$$

é o conjunto dos principais personagens de Star Trek Discovery, *então, para esta pessoa,* $f(\textsf{Burman}) = \{\textsf{Burman}, \textsf{Booker}\}$.

Determine D_f para a sua função f e mostre que, para o seu conjunto A e a sua função f, para todo $a \in A$, temos que $D_f \neq f(a)$.

Exemplo 13.3 *Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dos dígitos e a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que $f(x) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ quando x é par, e $f(x) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ quando x é ímpar.*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$f(x)$
9	não	sim	não	sim	não	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	{1,3,5,7,9}
8	sim	não	sim	não	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	{0,2,4,6,8}
7	não	sim	não	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	{1,3,5,7,9}
6	sim	não	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	{0,2,4,6,8}
5	não	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	{1,3,5,7,9}
4	sim	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	não	{0,2,4,6,8}
3	não	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	não	sim	{1,3,5,7,9}
2	sim	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	não	sim	não	{0,2,4,6,8}
1	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	não	sim	não	sim	{1,3,5,7,9}
0	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	sim	não	sim	não	sim	não	{0,2,4,6,8}
	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$D_f = \emptyset$

Exemplo 13.4 *Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $f(x) = \{x, x + 2\}$ quando $x < 2$, e $f(x) = \{x - 1, x + 1\}$ quando $x \geq 2$.*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...	$f(x)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰	⋮
7	não	não	não	não	não	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	...	$\{6, 8\}$
6	não	não	não	não	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	sim	...	$\{5, 7\}$
5	não	não	não	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	sim	não	...	$\{4, 6\}$
4	não	não	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	sim	não	não	...	$\{3, 5\}$
3	não	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	sim	não	não	não	...	$\{2, 4\}$
2	não	sim	$\boxed{\text{não}}$	sim	não	não	não	não	...	$\{1, 3\}$
1	não	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	não	não	não	...	$\{1, 3\}$
0	$\boxed{\text{sim}}$	não	sim	não	não	não	não	não	...	$\{0, 2\}$
	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{não}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	$\boxed{\text{sim}}$	...	$D_f = \{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$

Lema 13.0.1 *Para todo conjunto A, toda função $f : A \to \mathcal{P}(A)$, e todo elemento $x \in A$, se $A \neq \emptyset$, então $D_f \neq f(x)$.*

Vamos agora usar o Lema 13.0.1 para a prova do Teorema de Cantor, que diz que a quantidade de subconjuntos de um conjunto é sempre maior que a quantidade de elementos do conjunto:

Teorema 13.1 *Para todo conjunto A, temos que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Prova:
Seja A um conjunto. Seja $f : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que $f(x) = \{x\}$. Temos que f é injetiva. De fato, dados $x, y \in A$, se $f(x) = f(y)$, então $\{x\} = \{y\}$ e, portanto, $x = y$. Logo, por definição, temos que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Suponhamos, para uma contradição, que $|A| = |\mathcal{P}(A)|$. Seja $f : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que f é uma bijeção. Sabemos que $D_f \in \mathcal{P}(A)$, pela definição. Pelo Exercício 13.0.1, como f é uma função de A em $\mathcal{P}(A)$, temos que $D_f \neq f(x)$, para todo $x \in A$. Logo, f não é sobrejetiva, uma contradição. Assim, $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. Como $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ e $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, podemos concluir que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. ∎

O Teorema de Cantor (Teorema 13.1) garante a existência de conjuntos infinitos de cardinalidade maior que qualquer cardinalidade infinita dada. Assim, por exemplo, temos que $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})))| < \ldots$

Apêndice A

Definições

Neste apêndice descrevemos, em linhas gerais: o que são as definições (Seção A.1); quais são as suas principais características (Seções A.2.1 e A.2.2); e como elas devem ser escritas (Seção A.2), além de apresentar uma forma normal para definições (Seção A.2.3).

A.1 Definições

A Matemática — bem como qualquer um de seus ramos — lida com *conceitos*, que dizem respeito aos *objetos matemáticos* que estão sendo estudados.

Em uma apresentação organizada de qualquer parte da Matemática — seja ela um único tópico ou toda uma teoria — os conceitos são classificados em *primitivos* ou *não primitivos*. Em linhas gerais:

> Os **conceitos primitivos** são apresentados intuitivamente.
>
> Os **conceitos não primitivos** são apresentados através de definições.

Em outras palavras, na Matemática, as definições são utilizadas para fixar o significado dos *vocábulos* que expressam os conceitos não primitivos:

> Uma **definição** é uma parte de um texto que introduz um novo vocábulo, fixando o seu significado.

Exemplo A.1 *(a) Uma relação fundamental entre conjuntos é a relação de inclusão, cujo significado pode ser fixado pela seguinte definição:*

> ***Definição A.1*** *Se cada elemento de um conjunto A é também um elemento de um conjunto B, dizemos que A é um* subconjunto *de B.*

(b) Uma função importante da Trigonometria é a função seno, cujo significado pode ser fixado pela seguinte definição:

> ***Definição A.2*** *Dado um ângulo agudo x, por um ponto pertencente a um de seus lados, tracemos uma perpendicular ao outro lado, como na Figura A.1. Vamos definir:*
>
> $$sen(x) = \ \ seno\ de\ x\ \ = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

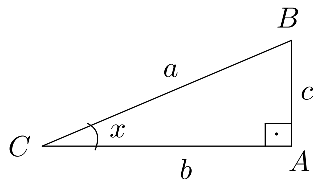


Figura A.1: $sen(x) = \dfrac{c}{a}$

(c) Um conceito fundamental sobre números naturais é a propriedade de ser par, cujo significado pode ser fixado pela seguinte definição:

> ***Definição A.3*** *Um número natural é* par *se é o dobro de algum número natural.*

(d) Um conceito importante da Teoria dos Grafos é a noção de grafo euleriano (lê-se óileriano*), cujo significado pode ser fixado pela seguinte definição:*

> ***Definição A.4*** *Um grafo é* euleriano *se possui uma trilha fechada que contém cada aresta exatamente uma vez.*

Todos os textos em destaque acima são exemplos de definições que correspondem ao que é, usualmente, encontrado nos textos de Matemática.

Como o Exemplo A.1 sugere, o significado do vocábulo que está sendo definido é fixado a partir do significado de outros vocábulos.

Exemplo A.2 *(a) No Exemplo A.1(a), definimos* subconjunto *a partir de noções como* elemento*,* conjunto *e* pertinência*.*

(b) No Exemplo A.1(b), definimos seno *a partir de noções como* cateto oposto*,* hipotenusa *e* quociente de dois números reais*.*

(c) No Exemplo A.1(c), definimos número par *a partir de noções como* número natural *e* dobro*.*

(d) No Exemplo A.1(d), definimos grafo euleriano *a partir de noções como* grafo*,* trilha fechada *e* aresta*.*

Uma outra maneira de se utilizar uma definição, em Matemática, é com o objetivo de verificar se um dado objeto corresponde, ou não, ao conceito definido.

Uma **definição** é uma parte de um texto que estabelece o significado de um conceito, dando condições para sua verificação ou determinação.

Exemplo A.3 *(a) Segundo a definição de inclusão apresentada no Exemplo A.1(a), dados dois conjuntos A e B, para verificar se A é ou não um subconjunto de B, basta verificar se cada elemento de A é também um elemento de B.*

(b) Segundo a definição de seno apresentada no Exemplo A.1(b), dado um ângulo agudo x, para calcular o seno de x basta fazer um desenho como na Figura A.1, determinar as medidas a e c e calcular o quociente $\frac{c}{a}$.

(c) Segundo a definição de número par apresentada no Exemplo A.1(c), dado um número natural n, para verificar se n é par, basta calcular sua metade e verificar se esta é um número natural.

Observação.

É importante salientar que, em Matemática, as definições não ocorrem ao acaso. Usualmente, são motivadas pela presença de um conceito que aparece com frequência.

Por exemplo, a ocorrência frequente do conceito

> *Número natural positivo maior do que* 1 *que não possui fatores diferentes de* 1 *e de si mesmo.*

levou à necessidade de se definir o conceito de número primo.

Neste sentido, uma definição pode ser vista como uma *convenção* que diz qual o significado de um conceito e que estabelece condições para sua verificação ou determinação.

Exercício 40 *(a) Determinar os conceitos que são usados na definição do Exemplo A.1(d), para definirmos grafo euleriano.*

(b) Determine as condições que são dadas na definição do Exemplo A.1(d), para verificarmos se um grafo é euleriano.

Exercício 41 *Examinar um texto didático sobre a Matemática do Ensino Básico — que você considere de qualidade — e, para cada conceito abaixo, determinar se os autores o adotam como primitivo ou não primitivo. Em cada caso, descreva as explicações ou definições que os autores apresentam, para cada conceito.*

(a) Arranjo. Permutação. Combinação. Fatorial.

(b) Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento. Probabilidade.

(c) Razão. Proporção. Grandezas diretamente proporcionais. Grandezas inversamente proporcionais.

(d) Capital. Juros. Taxa de Juros. Montante.

A.2 Forma normal das definições

Por transmitirem significados e apresentarem condições de verificação, as definições desempenham um papel essencial no ensino, no estudo e no desenvolvimento da Matemática. Mas, para que possam ser utilizadas de maneira sistemática, em cada uma destas atividades, as definições devem estar escritas de modo adequado. Assim, somos levados a considerar uma maneira especial de escrever as definições. Esta maneira decorre das análises a seguir.

A.2.1 Tipos de objetos

Em primeiro lugar, uma definição só faz sentido quando aplicada a um certo *tipo* de objeto.

Exemplo A.4 *(a) Como definida no Exemplo A.1(a), a relação de inclusão diz respeito a conjuntos.*

(b) Como definida no Exemplo A.1(b), a função seno diz respeito a ângulos agudos.

(c) Como definida no Exemplo A.1(c), a propriedade ser par diz respeito a números naturais.

Esta observação simples nos afasta de aplicações indevidas das definições.

Exemplo A.5 *Se aplicarmos a definição de número par, formulada para números naturais no Exemplo A.1(c), a números reais, teremos:*

> Um número real é par, se é o dobro de algum número real.

Agora, como todo número real pode ser dividido por dois, deste fato concluímos que todo número real é par, o que é um absurdo.

Para evitar que apliquemos uma definição formulada para um certo tipo de objeto a objetos de um outro tipo, ao escrevermos as definições vamos exigir que o tipo de objeto ao qual ela se aplica esteja explicitamente determinado.

Exemplo A.6 *(a) Uma maneira mais adequada de escrever a definição apresentada no Exemplo A.1(a) é a seguinte:*

> *Sejam A e B conjuntos. Se cada elemento de A é também um elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B.*

(b) Uma maneira mais adequada de escrever a definição apresentada no Exemplo A.1(b) é a seguinte:

> *Seja x um ângulo agudo como o da Figura A.1. Definimos:*

$$\textit{seno de } x = sen(x) = \frac{\textit{cateto oposto a } x}{\textit{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

(c) Uma maneira mais adequada de escrever a definição apresentada no Exemplo A.1(c) é a seguinte:

> *Seja a um número natural. Dizemos que a é par se é o dobro de algum número natural.*

Compare estas definições com as apresentadas originalmente no Exemplo A.1.

A.2.2 Conceitos definidos e básicos

Em segundo lugar, uma definição só introduz um conceito a partir de conceitos já conhecidos. Assim, os conceitos que ocorrem em uma definição podem ser classificados em duas categorias:

1. **Conceito definido:** é o conceito cujo significado está sendo fixado na definição.
2. **Conceitos básicos:** são os conceitos utilizados na definição, mas cujos significados não estão expressos na definição.

Exemplo A.7 *(a) No Exemplo A.6(a), o conceito definido é* subconjunto *e entre os conceitos básicos estão* elemento*,* conjunto *e* pertinência*.*

(b) No Exemplo A.6(b), o conceito definido é seno *e entre os conceitos primitivos estão* cateto oposto*,* hipotenusa *e* quociente de números reais*.*

(c) No Exemplo A.6(c), o conceito definido é número par *e entre os conceitos primitivos estão* número natural *e* dobro*.*

Podemos, então, dizer que uma definição de um conceito c é baseada no conhecimento dos conceitos c_1, c_2, ..., c_m, utilizados como conceitos básicos na definição de c:

$$\begin{array}{c}\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_m} \\ \Downarrow \\ c\end{array}$$

Agora, como o significado dos conceitos devem ser fixados por suas definições, para que possamos aceitar c_1, c_2, ..., c_m como conhecidos e considerar que c foi definido, devemos ter as definições dos conceitos primitivos c_1, c_2, ..., c_m. Mas, da mesma forma que na definição de c, a definição de cada um dos conceitos c_1, c_2, ..., c_m, será baseada no conhecimento de outros conceitos, utilizados como conceitos primitivos nas definições de c_1, c_2, ..., c_m.

$$\begin{array}{cccc}\underbrace{c_{11}, \ldots, c_{1n_1}} & \underbrace{c_{21}, \ldots, c_{2n_2}} & \cdots & \underbrace{c_{m1}, \ldots, c_{mn_k}} \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m\end{array}$$

Se levarmos adiante o processo esboçado acima, correremos o risco de encontrar *regressos infinitos* e/ou *círculos viciosos* e, obviamente, uma definição correta deve excluir essas duas possibilidades. Assim, devemos admitir o seguinte *Critério Fundamental Sobre a Estrutura das Definições*:

Toda definição é baseada em um certo número de conceitos previamente conhecidos, ou seja, aceitos sem definição.

Este critério fundamental é tanto *local* — ou seja, diz respeito à definição tomada isoladamente e, neste sentido, está fixando os conceitos básicos da definição — quanto *global* — ou seja, diz respeito à definição dentro de uma teoria e, neste sentido, está relacionando os conceitos que ocorrem na definição com os conceitos primitivos da teoria.

Para evitar que façamos confusão sobre qual é o conceito que está sendo definido e quais são os conceitos que estão sendo considerados como básicos, quando escrevermos a definição, vamos exigir que essa classificação dos conceitos esteja bem determinada. Faremos isto estipulando que o conceito definido esteja escrito sempre antes dos conceitos primitivos que estão sendo utilizados na definição.

Exemplo A.8 *(a) Uma maneira mais adequada de escrever a definição de inclusão, apresentada no Exemplo A.6(a), é:*

> *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é um* <u>subconjunto</u> *de B se cada elemento de A é também um elemento de B.*

(b) Uma maneira mais adequada de escrever a definição de seno, apresentada no Exemplo A.6(b), é:

> *Seja x um ângulo agudo como o da Figura A.1. O* <u>seno de x</u> *é definido como:*
>
> $$sen(x) = \frac{\textit{cateto oposto a } x}{\textit{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

(c) Uma maneira mais adequada de escrever a definição de número par, apresentada no item (c) do Exemplo A.6, é:

> *Seja a um número natural. Dizemos que a é* <u>par</u> *se é o dobro de algum número natural.*

Compare estas definições com as apresentadas originalmente no Exemplo A.6.

Observação:

A classificação de um conceito como básico ou definido é relativo à uma definição.

Em outras palavras, um conceito que é definido em uma definição pode ser tomado como básico em outra.

A.2.3 Forma normal

Segue do que foi dito nas seções A.2.1 e A.2.2 que toda definição consiste de três partes:

1. **Atribuição**: é a parte da definição que especifica a que tipo de objetos a definição se aplica.
2. **O que é definido (*definiendum*)**: é a parte da definição que especifica qual o conceito que está sendo definido.

3. **O que define (*definiens*)**: é a parte da definição que consiste de um enunciado que expressa o significado do conceito definido a partir do significado dos conceitos primitivos.

Todas as definições devem ser escritas (ou reescritas) de acordo com a especificação abaixo, onde cada uma das partes aparece em destaque e na ordem em que deve ser escrita, para uma melhor entendimento dos conceitos definidos.

Forma normal de definições.

Uma definição está em **forma normal**, se está escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\text{1. a palavra "Definição:"}}$$
$$+$$
$$\boxed{\text{2. atribuição}}$$
$$+$$
$$\boxed{\text{3. o que é definido}}$$
$$+$$
$$\boxed{\text{4. o que define}}$$

1. Inicialmente, a palavra "Definição:", deixando claro que o texto a seguir é uma definição. A palavra "Definição:" pode estar rotulada para futura diferenciação ou referência.
2. Em seguida, a especificação do tipo de objetos aos quais definição se aplica.
3. Em seguida, a especificação do conceito que está sendo definido.
4. Por fim, um enunciado que expressa o significado do conceito definido a partir do significado dos conceitos básicos, onde o que é definido aparece em *destaque* no texto da definição e o que define aparece escrito com *uma certa quantidade de rigor matemático.*

Exemplo A.9 *(a) Uma definição em forma normal de inclusão é a seguinte:*

> ***Definição A.5*** *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é um* <u>subconjunto</u> *de B se todo elemento de A é também um elemento de B.*

(b) Uma definição de seno em forma normal é a seguinte:

> ***Definição A.6*** *Seja x um ângulo agudo como o da Figura A.1. O* <u>seno</u> *de x é o número $sen(x) = \dfrac{c}{a}$.*

(c) Uma definição de número par em forma normal é a seguinte:

Definição A.7 *Seja a um número natural. Dizemos que a é* par *se existe um número natural b, tal que* $a = 2b$.

Compare estas definições com as apresentadas originalmente no Exemplo A.1.

Observação.

Um dos critérios para que uma definição esteja em forma normal é que o que define deve estar escrito com uma certa quantidade de rigor matemático. Embora rigor matemático seja uma propriedade desejável das definições, é difícil especificar o que este conceito significa e utilizá-lo como um critério objetivo na elaboração de definições. Ainda mais que a quantidade de rigor adotada em um texto depende muito do perfil do leitor a quem o texto se destina.

Seguindo as diretrizes apresentadas aqui — com exercício e experiência — podemos escrever definições que atingem uma grande gama de leitores e podem tornar o nosso texto muito mais útil e abrangente do que os textos nos quais as definições não estão escritas de maneira estruturada.

Exercício 42 *Escrever em forma normal a definição de grafo euleriano apresentada no Exemplo A.1(d).*

Exercício 43 *Escrever em forma normal, cada uma das definições que você apresentou no Exemplo 41.*

(a) Razão. Proporção. Grandezas diretamente proporcionais. Grandezas inversamente proporcionais.

(b) Capital. Juros. Taxa de Juros. Montante.

(c) Arranjo. Permutação. Combinação. Fatorial.

(d) Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento. Probabilidade.

Referências Bibliográficas

[1] R. de Freitas e P. Viana, *Métodos de Prova*, Minicurso do II Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Estadual de Londrina, 2012, disponível em [pdf].

[2] Abramo Hefez, Indução Matemática, Apostila 04 do Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2006, disponível em http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf.